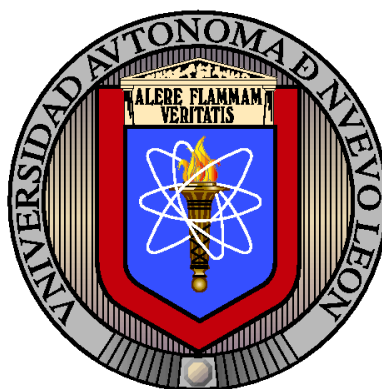


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



APROXIMACIÓN MEDIANTE MODELOS  
DE PROGRAMACIÓN ENTERA A  
PROBLEMAS DE EMPAQUETAMIENTO

POR

LUIS ALFONSO INFANTE RIVERA

EN OPCIÓN AL GRADO DE

DOCTOR EN INGENIERÍA

CON ESPECIALIDAD EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

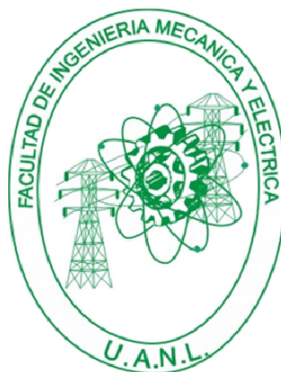
SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

ENERO 2016

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



APROXIMACIÓN MEDIANTE MODELOS  
DE PROGRAMACIÓN ENTERA A  
PROBLEMAS DE EMPAQUETAMIENTO

POR

LUIS ALFONSO INFANTE RIVERA

EN OPCIÓN AL GRADO DE

DOCTOR EN INGENIERÍA

CON ESPECIALIDAD EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

ENERO 2016

**Universidad Autónoma de Nuevo León**  
**Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica**  
**Subdirección de Estudios de Posgrado**

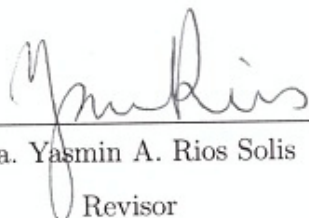
Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «APROXIMACIÓN MEDIANTE MODELOS DE PROGRAMACIÓN ENTERA A PROBLEMAS DE EMPAQUETAMIENTO», realizada por el alumno Luis Alfonso Infante Rivera, con número de matrícula 849084, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Doctor en Ingeniería con especialidad en Ingeniería de Sistemas.

El Comité de Tesis



Dr. Igor S. Litvinchev

Asesor



Dra. Yasmin A. Rios Solis

Revisor

Dr. Vincent A. Lionel Boyer

Revisor



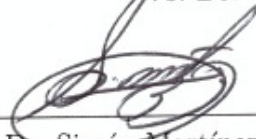
Dr. José A. Marmolejo Saucedo

Revisor

Dra. Socorro Nogueira Rangel

Revisor

Vo. Bo.



Dr. Simón Martínez Martínez

Subdirector de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Enero 2016

*A mi madre por su apoyo.*



# ÍNDICE GENERAL

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>VI</b>
<b>Resumen</b>	<b>VII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Estructura de la tesis . . . . .	1
1.2. Problema de empaquetamiento . . . . .	2
1.3. Objetivo . . . . .	3
1.4. Justificación . . . . .	3
1.5. Hipótesis . . . . .	3
1.6. Metodología . . . . .	4
1.7. Sobre el trabajo de tesis . . . . .	4
<b>2. Preliminares, Nomenclatura y Terminología</b>	<b>5</b>
2.1. Simbología . . . . .	5
2.2. Terminología . . . . .	8
<b>3. Acerca del Problema de Empaquetamiento</b>	<b>10</b>

3.1.	Acerca del problema de empaquetamiento . . . . .	10
3.2.	Aplicaciones del problema de empaquetamiento . . . . .	13
3.2.1.	Objetos planos . . . . .	13
3.2.2.	Objetos curvos . . . . .	15
3.2.3.	Posibles aplicaciones para el empaquetamiento con telescopia	17
3.2.4.	Otras aplicaciones . . . . .	17
3.3.	Modelos matemáticos y técnicas de solución . . . . .	21
<b>4.</b>	<b>Modelo Matemático</b>	<b>26</b>
4.1.	Sobre las características del modelo matemático . . . . .	26
4.2.	Modelo Matemático, standard . . . . .	28
4.2.1.	Redundancias . . . . .	30
4.3.	Modelo Matemático, caso sin frontera . . . . .	31
4.4.	Modelo Matemático, caso compacto . . . . .	31
4.5.	Modelo Matemático, con desigualdades validas . . . . .	33
4.6.	Modelo Matemático, caso telescopia . . . . .	36
4.7.	Modelo Matemático, objetos con espesor . . . . .	38
<b>5.</b>	<b>Objetos Circulares</b>	<b>40</b>
5.1.	Norma vectorial . . . . .	40
5.2.	Normas simétricas . . . . .	42
5.2.1.	Círculo . . . . .	42
5.2.2.	Cuadrado . . . . .	42

---

5.2.3.	Rombo . . . . .	42
5.2.4.	Octágono . . . . .	43
5.3.	Normas asimétricas . . . . .	44
5.3.1.	Rectángulo . . . . .	44
5.3.2.	Elipse . . . . .	45
5.3.3.	Hexágono . . . . .	46
5.3.4.	consideraciones sobre las normas asimétricas . . . . .	47
5.4.	Otras Normas . . . . .	47
5.4.1.	Círculos Trunco . . . . .	47
5.4.2.	Tres dimensiones . . . . .	48
<b>6.</b>	<b>Objetos Irregulares</b>	<b>49</b>
6.1.	Objeto rectangular . . . . .	49
6.1.1.	intersección sin telescopía . . . . .	49
6.1.2.	intersección con telescopía . . . . .	51
6.2.	Objeto Estrella . . . . .	53
6.2.1.	Intersección sin telescopía . . . . .	53
6.2.2.	intersección con telescopía . . . . .	57
6.3.	Objeto L . . . . .	59
6.3.1.	Intersección sin telescopía . . . . .	60
6.3.2.	Intersección con telescopía . . . . .	63
6.4.	Empaquetamiento de Objetos diferentes . . . . .	64

---

<b>7. Contenedores y mallas</b>	<b>68</b>
7.1. Contenedor rectangular . . . . .	68
7.2. Contenedor L . . . . .	68
7.3. Contenedor circular . . . . .	70
7.4. Contenedor poligonal . . . . .	71
7.5. Contenedor cilíndrico . . . . .	73
7.6. Generación de mallas . . . . .	74
<b>8. Experimentación (Círculos)</b>	<b>78</b>
8.1. Objetivos . . . . .	78
8.2. Experimentación (círculos de un solo tipo ) . . . . .	78
8.2.1. Sobre las instancias y el diseño de malla . . . . .	79
8.2.2. Diseño de experimentos . . . . .	80
8.2.3. Hardware y Software . . . . .	81
8.3. Resultados de experimentación . . . . .	81
8.3.1. Resultados, relajación lineal . . . . .	82
8.3.2. Resultados, modelo standard vs compacto . . . . .	82
8.4. Experimentación (diferentes círculos) . . . . .	87
8.4.1. Sobre las instancias y el diseño de malla . . . . .	87
8.4.2. Hardware y software . . . . .	88
8.4.3. Resultados, problema entero . . . . .	88
8.5. Conclusiones . . . . .	90

<b>9. Experimentación (Objetos Circulares)</b>	<b>91</b>
9.1.    Objetivo . . . . .	91
9.2.    Experimentación, diferentes objetos . . . . .	91
9.2.1.    Diseño de experimentos . . . . .	91
9.2.2.    Hardware y software . . . . .	92
9.2.3.    Resultados de experimentación . . . . .	92
9.3.    Experimentación con octágonos, con y sin telescopía . . . . .	95
9.3.1.    Diseño y resultados de experimentación . . . . .	95
9.4.    Conclusiones . . . . .	97
<b>10.Experimentación (Objetos Estrella)</b>	<b>98</b>
10.1.    Objetivos . . . . .	98
10.2.    Experimentación con un solo tipo de objeto . . . . .	98
10.2.1.    Diseño de experimentos . . . . .	98
10.2.2.    Resultados . . . . .	99
10.3.    Experimentación con mas de un tipo de objeto y telescopía . . . .	100
10.4.    Diseño de experimentos . . . . .	100
10.4.1.    Resultados de experimentación . . . . .	103
10.5.    Conclusiones . . . . .	104
<b>11.Experimentación (Objetos L)</b>	<b>106</b>
11.1.    Objetivos . . . . .	106
11.2.    Definición de objeto L . . . . .	106

---

11.3.	Experimentación (un solo tipo) . . . . .	107
11.3.1.	Diseño de experimentos . . . . .	107
11.3.2.	Resultados de experimentación . . . . .	109
11.4.	Experimentación (diferentes tipos) . . . . .	109
11.4.1.	Diseño de experimentación . . . . .	109
11.4.2.	Resultados . . . . .	111
11.5.	Experimentación (diferentes orientaciones) . . . . .	112
11.6.	Diseño de experimentos . . . . .	112
11.6.1.	Resultados . . . . .	115
11.7.	Experimentación (contenedor L) . . . . .	119
11.8.	conclusiones . . . . .	121
<b>12.</b>	<b>Heurística (Basada en LP)</b>	<b>122</b>
12.1.	Introducción . . . . .	122
12.2.	Diseño de heurística . . . . .	122
12.3.	Experimentación . . . . .	127
12.3.1.	Objetivo . . . . .	127
12.3.2.	Diseño de experimentación . . . . .	127
12.3.3.	Resultados de experimentación con círculos . . . . .	129
12.3.4.	Resultados de experimentación con octágonos . . . . .	131
12.3.5.	Conclusiones . . . . .	133
<b>13.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>134</b>

13.1. Trabajo Futuro . . . . .	134
<b>A. Soluciones - Círculos</b>	<b>135</b>
A.1. Soluciones (un solo tipo) . . . . .	135
A.2. Soluciones (mas de un tipo) . . . . .	137
A.2.1. sin telescopia . . . . .	137
A.2.2. con telescopia . . . . .	138
<b>B. Soluciones - Objetos Circulares</b>	<b>140</b>
B.1. Soluciones (diferentes objetos) . . . . .	140
B.2. Soluciones (Octágonos ST,CT,CTB ) . . . . .	145
<b>C. Soluciones - Objetos Estrella</b>	<b>147</b>
C.1. Soluciones empaquetamiento de objeto estrella . . . . .	147
C.2. Soluciones diversos tipos de objetos estrella y telescopia . . . . .	148
<b>D. Soluciones - Objetos L</b>	<b>153</b>
D.1. Soluciones (un solo tipo) . . . . .	153
D.2. Soluciones (difs. tipos) . . . . .	157
D.3. Soluciones (difs. orientaciones) . . . . .	159
D.4. Contenedor L . . . . .	162
<b>E. Soluciones - Heurística</b>	<b>163</b>
E.1. Círculos . . . . .	163
E.2. octagonos . . . . .	165

# AGRADECIMIENTOS

---

Al consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico que me brindó durante mis estudios.

A mi asesor Dr. Igor S. Litvinchev por brindarme la oportunidad de trabajar en este proyecto, a la Dra. Maria do Socorro Nogueira Rangel por su ayuda durante mis estancias en la UNESP, a la Dra. Yasmin Rios Solis , al Dr. Vincent Boyer y al Dr. José Antonio Marmolejo Saucedo por tomarse su tiempo para ser revisores de esta tesis y al M.I. José Daniel Mosquera Artamonov por sus comentarios durante la redacción de la misma y a la Dra. Edith Lucero Ozuna Espinosa por su apoyo para el desarrollo de esta investigación.



# RESUMEN

---

Luis Alfonso Infante Rivera. Candidato para el grado de Doctor en Ingeniería de Sistemas.

Universidad Autónoma de Nuevo León.

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

## APROXIMACIÓN MEDIANTE MODELOS DE PROGRAMACIÓN ENTERA A PROBLEMAS DE EMPAQUETAMIENTO

Número de páginas: 175.

**Objetivos y método de estudio:** El objetivo de esta investigación es la aplicación y desarrollo de modelos matemáticos enteros para obtener soluciones optimas o cercanas al optimo a problemas de empaquetamientos, una de la ventajas de utilizar este tipo de modelos es por la rápida implementación y buenas soluciones que pueden tenerse utilizando solver comercial (como Cplex), la importancia de obtener buenas u optimas soluciones a problemas de empaquetamiento es debido a su gran cantidad de aplicaciones en la ciencia y en la industria.

En este trabajo se comparan diversas formulaciones o variantes del modelo matemático propuesto para comparar su rendimiento entre estas analizando la calidad de las soluciones obtenidas y el tiempo transcurrido para obtener estas, ademas de mostrar la generalidad que ofrece este modelo a la aplicación en distintos problemas de empaquetamiento , probando el empaquetamiento de diversos tipos de objetos

que no han sido muy estudiados en la investigación de operaciones.

Gran parte de esta investigación ha sido publicada en diversas revistas, capítulos de libros, en memorias de congresos nacionales e internacionales y seminarios que se listan a continuación:

Artículos en revistas indexadas:

- Litvinchev, I., Infante, L. & Ozuna, E.L. (2015). *Packing circular-like objects in a rectangular container*. Journal of Computer and Systems Sciences International; Volume 54, Issue 2, pp 259-267. Springer.

Capítulos de libros:

- Litvinchev, I., Infante, L. & Ozuna, E.L. (2014). *Approximate circle packing in a rectangular container: integer programming formulations and valid inequalities*. Lecture Notes in Computer Science, 8760, pp. 47-60, Springer.
- Litvinchev, I., Infante, L. & Ozuna, E.L. (2014). *Approximate Packing: Integer Programming Models, Valid Inequalities and Nesting*, Optimized Packings with Applications (Springer Optimization and Its Applications, v. 105), Chapter: 9, Editors: G. Fasano, J.A. Pinter, pp.117-135. Springer.
- Litvinchev, I., Infante, L. & Ozuna, E.L. (2015). *Using Different Norms in Packing Circular Objects*. Lecture Notes in Computer Science pp 540-548, Volume 9012, Springer.
- Litvinchev, I., Infante, L. & Ozuna, E.L. (2016 por aparecer). *Using valid inequalities and different grids in LP-based heuristics for packing circular objects*. Lecture Notes in Computer Science/Artificial Intelligence, Volume 255, Springer.

## Memorias en Congresos Nacionales e Internacionales

- *LP-based heuristic for packing circular-like objects in a rectangular container.* Igor Litvinchev, Luis Alfonso Infante Rivera y Edith Lucero Ozuna Espinosa, Congreso Internacional de Logística y Cadena de Suministro, CILOG ,Pedro Escobedo, Edo. Querétaro ,Mexico, Octubre 2015.
- *LP-based heuristic for packing circular-like objects in a rectangular container* , Litvinchev, I., Infante, L.& Ozuna, E.L., XLV Simposio Brasileiro de Pesquisa Operacional, XLVII SOBRAPO, Porto do Galhinas, Pernambuco, Brasil, Agosto 2015.

## Seminarios y Workshops

- *Empaquetamiento óptimo de círculos y rectángulos en un contenedor: aproximación mediante programación entera*, L. A. Infante Rivera. 1era Jornada de Optimización, PISIS-FIME, Universidad Autónoma de Nuevo León, 23 Mayo de 2014.
- *Modelos de programación entera para problemas de empaquetamiento*, L. A. Infante Rivera. III Jornada de Optimización, Posgrado en Ingeniería de Sistemas, FIME-UANL, Mayo 2015.
- *Resolviendo problemas de packing.* L. A. Infante Rivera., Seminarios de Divulgación, Verano Científico, PISIS, FIME, UANL, Julio 2015
- *Packing lineal y no lineal con AIMMS y Cplex/C++*, L. A. Infante Rivera, 1o Workshop de Otimização Combinatória de São José do Rio Preto, Brasil, UNESP-IBILCE, Agosto 2015.

Parte de este trabajo ha sido realizado en estancias en el extranjero en los años 2014 y 2015 en la Universidad Estadual de Sao Paulo gracias al apoyo de la Dra. Socorro Rangel y al apoyo económico del Conacyt.

**Contribuciones y conclusiones:** Las contribuciones resultado de este trabajo de investigación es tener un modelo matemático entero capaz de proporcionar buenas soluciones al problema de empaquetamiento ademas de ser un modelo que puede ser generalizado para resolver una gran cantidad de problemas de este tipo que se puedan presentar.

---

Firma del asesor

Dr. Igor S. Litvinchev

## CAPÍTULO 1

# INTRODUCCIÓN

---

### 1.1 ESTRUCTURA DE LA TESIS

- En esta introducción se presenta el objetivo de la investigación , la justificación de la tesis, los fundamentos teóricos y la metodología empleada para el desarrollo de la misma, además de una breve introducción acerca del problema de empaquetamiento y los casos estudiados para esta tesis.
- En el segundo capítulo, se define la terminología y nomenclatura mas usada en esta tesis.
- En el tercer capítulo se dará una introducción del problema de empaquetamiento, los diferentes enfoques que puede tener el problema de empaquetamiento, los métodos que se han utilizado o se utilizan para darle solución.
- En el cuarto capítulo se explica a detalle el modelo matemático de empleado en esta investigación.
- En el quinto capítulo se aborda como definir objetos denominados "objetos circulares" para ser introducidos en el modelo.
- En el sexto capítulo se aborda el tema de empaquetamiento de objetos irregulares.
- En el capítulo siete se aborda el tema de empacar objetos en contenedores no rectangulares.

- En el capítulo ocho se explicara la experimentación realizada para contenedores rectangulares en objetos circulares
- En el capítulo nueve se explicara la experimentación realizada para objetos circulares.
- En el capítulo diez se detalla la experimentación realizada para objetos tipo L.
- En el capítulo once se detalla la experimentación realizada para probar objetos tipo estrella.
- En el capítulo doce se describe y experimenta una heurística basada en la relajación lineal del modelo.
- En la capítulo final se dan las conclusiones a las que se llegó con esta investigación además del desarrollo futuro de la misma.
- En el Apéndice 1, este apéndice contendrá las imágenes de las soluciones a la experimentación con contenedor rectangular y objetos circulares.
- En el Apéndice 2, este apéndice contendrá las imágenes de las soluciones a la experimentación con objetos tipo circular.
- En el Apéndice 3, este apéndice contendrá las imágenes de las soluciones a la experimentación con objetos L.
- En el Apéndice 4, este apéndice contendrá las imágenes de las soluciones a la experimentación con objetos tipo estrella.
- En el Apéndice 5, este apéndice contendrá las imágenes de las soluciones a la experimentación con la heurística.

## 1.2 PROBLEMA DE EMPAQUETAMIENTO

El problema de empaquetamiento, desde el punto de vista de la investigación de operaciones, consiste en colocar dentro de uno o más contenedores, diversos tipos de

objetos, de forma que no se traslapen entre ellos o se salgan fuera de los contenedores, el objetivo de estos problemas, puede ser maximizar el área ocupada dentro del contenedor, o si son varios contenedores podría ser el de minimizar la cantidad de contenedores a utilizar (Bin packing). Estos problemas se han intentado dar solución con técnicas heurísticas y modelos no lineales, se hablara con más detalle de estas técnicas en el capítulo 3. En esta investigación se plantean modelos matemáticos de programación entera lineal, basados en la discretitzación del contenedor mediante una malla de nodos, esta técnica fue primeramente planteada por beasley [6], para un problema de corte con guillotina.

### 1.3 OBJETIVO

El objetivo de esta investigación es encontrar buenas soluciones en un tiempo razonable al problema de empaquetamiento de objetos de diversos tipos y diversos tipos de contenedores, mediante aproximaciones utilizando modelos de programación entera.

### 1.4 JUSTIFICACIÓN

La construcción de modelos enteros para problemas de empaquetamiento se puede justificar porque los modelos enteros pueden hacer uso de solvers comerciales, en lugar de utilizar modelos matemáticos no lineales o heurísticas que pueden fallar en encontrar el óptimo , o no poder dar soluciones factibles (solver no lineales).

### 1.5 HIPÓTESIS

Utilizando un modelo de programación lineal entera, empaquetar diversos tipos de objetos, obteniendo resultados comparables a los que pueden ofrecer otros métodos (una heurística por ejemplo), con razonables tiempos de solución.

## 1.6 METODOLOGÍA

La metodología a seguir es implementar el modelo matemático y sus modificaciones en CPLEX/C++ y la heurística basada en este modelo y proponer diversos tipos de instancias (empaquetando un solo tipo de objeto, con diversos tipos en el mismo contenedor, etc.), e intentar resolverlas mediante estas implementaciones computacionales en un tiempo limite, estimar la calidad de la soluciones alcanzadas en base al tiempo y al GAP estimado por el mismo solver o comparándolas con las soluciones existentes en la literatura (si las hay).

## 1.7 SOBRE EL TRABAJO DE TESIS

Gran parte de este trabajo de investigación puede encontrarse en los trabajos [35],[39],[39],[36],[37] y por publicar en [40].



## CAPÍTULO 2

# PRELIMINARES, NOMENCLATURA Y TERMINOLOGÍA

---

En este capítulo se ofrece una breve definición de los conceptos, terminología y nomenclatura utilizadas con mayor frecuencia en esta investigación, capítulos posteriores podrían dar una explicación mayor de estos.

## 2.1 SIMBOLOGÍA

En esta sección se define la nomenclatura utilizada en esta tesis para nombrar los modelos, las variables y parámetros de estos y de la heurística desarrollada.

Tabla 2.1: Tabla de símbolos

Símbolo	Definición
<i>Abreviaturas para parámetros diseño de malla y contenedor</i>	
$w$	Es el ancho del contenedor, en el caso de contenedor no rectangular, sería el ancho máximo en el eje $x$ del contenedor.
$l$	Es el largo del contenedor, en el caso de contenedor no rectangular, sería el largo máximo en el eje $y$ del contenedor.
$M$	Es la cantidad de nodos de la malla a lo ancho del contenedor (sobre el eje $x$ ).

*Continúa página siguiente*

Tabla 2.1 – *Continuación de página anterior*

Símbolo	Definición
$N$	Es la cantidad de nodos de la malla a lo largo del contenedor (sobre el eje $y$ ).
$n$	Es la cantidad de nodos de la malla.
<b><i>Índices y alias del modelo</i></b>	
$i$	Es el índice de los nodos de la malla.
$j$	Es un alias del índice $i$ .
$k$	Es el índice de los tipos de objetos.
$l$	Es un alias del índice $k$ .
$I$	Es un conjunto, indica los nodos $i$ que pertenezcan al conjunto de nodos de la malla.
$I$	Es un conjunto, indica los nodos $i$ que pertenecen al conjunto de nodos de la malla, pero están ubicados en la frontera del contenedor.
$K$	Es un conjunto, indica los tipos de objetos $k$ que estén considerados para una instancia.
<b><i>Parámetros de la instancia</i></b>	
$W_k$	Es un vector que indica el valor para cada tipo de objeto $k$ .
$m_k$	Es un vector que indica la cantidad mínima necesaria para cada tipo de objeto $k$ .
$M_k$	Es un vector que indica la cantidad máxima requerida para cada tipo de objeto $k$ .
$d_{ij}$	Es un matriz de distancias o normas entre cada para de nodos de la malla.
$N_{ik}$	Es un conjunto de parámetros que indican si entre una pareja de nodo $i$ con objeto tipo $k$ existe intersección con otro nodo $j$ con objeto tipo $k$ , (0, no hay intersección, 1 si hay intersección).

*Continúa página siguiente*

Tabla 2.1 – *Continuación de página anterior*

Símbolo	Definición
$\omega_{ik}$	Es un conjunto de parámetros que indica si entre una pareja de nodo $i$ con objeto tipo $k$ existe intersección con otro nodo $j$ con objeto tipo $l$ , pero considerando la telescopía, (0, no hay intersección, 1 si hay intersección).
$\alpha_{ij}^k$	Conjunto de parámetros que indican si entre un par de nodos $i, j$ existe un objeto del tipo $k$ .
<b><i>Variables del modelo</i></b>	
$x_i^k$	Es un arreglo de variables binarias que define si existe un objeto en el nodo $i$ de la malla del tipo $k$ , (0, no existe, 1 si existe).
$x_i$	Es un arreglo de variables binarias que define si existe un objeto en el nodo $i$ de la malla, se utiliza cuando el modelo solo maneja un tipo de objeto.
<b><i>Abreviaturas para tipos de modelos</i></b>	
$S$	Es la abreviatura para el Modelo Standard).
$SC$	Es la abreviatura que indica que un modelo no tiene desigualdades validas.
$C1$	Es el nombre dado para las restricciones(desigualdades validas) de tipo 1.
$C2$	Es el nombre dado para las restricciones(desigualdades validas) de tipo 2.
$CC$	Es el la abreviatura dada cuando se agregan los dos tipos de desigualdades validas a un modelo.
$RL$ o $LP$	Es la abreviatura que indica que el resultado de la instancia proviene de una relajación lineal de las variables.
$IP$	Es la abreviatura que indica que el resultado de la instancia, no tiene relajación.

*Continúa página siguiente*

Tabla 2.1 – *Continuación de página anterior*

Símbolo	Definición
$SF$	Es la abreviatura que indica que el modelo no considera puntos en la frontera del contenedor.
$CF$	Es la abreviatura que indica que el modelo considera puntos en la frontera del contenedor.
$CF$	Es la abreviatura que indica uso de desigualdades validas en modelo.
$ST$	Es la abreviatura que indica que el modelo no considera telescopía.
$CT$	Es la abreviatura que indica que el modelo considera telescopía.
$CTB$	Es la abreviatura que indica que el modelo considera telescopía y objetos con espesor (borde).

## 2.2 TERMINOLOGÍA

En esta sección se hace una breve definición la terminología mas utilizada en esta tesis (en orden alfabético).

- Clase o forma de objeto.- Se refiere a la forma del objeto, un círculo define una clase, un cuadrado otra.
- Desigualdades validas .- Se refiere a restricciones agregadas al modelo que se consideran pueden ayudar a resolver el modelo.
- Frontera del contenedor .- Se refiere a las paredes del contenedor, se supone que los objetos dentro del contenedor no pueden traspasarlas.
- Intersección o solapamiento.- Es cuando el área de un objeto (completa o parcialmente) esta sobre la de otro objeto.
- Intersección parcial o solapamiento parcial.- Establece que un objeto intersecta con otro pero sin que este pertenezca al otro objeto.

- Norma.- Se refiere a la norma vectorial, usada en esta tesis para detectar intersecciones entre objetos.
- Modelo Standard o General.- Se refiere al modelo entero de empaquetamiento original, sin agregar desigualdades validas, o sustituir las existentes.
- Objetos Circulares.- Se refiere a los objetos definidos en forma semejante al circulo mediante la norma.
- Punto pivote.- Es el punto que se dice define al objeto, también es el punto en que se coloca el objeto en un nodo, en el circulo, cuadrado y otros objetos regulares o semiregulares es el punto central.
- Telescopía.- Definimos telescopía cuando existe un empaquetamiento donde objetos pueden estar dentro de otros objetos mas grandes.
- Tipo o escala de objeto.- Se refiere a la escala o tamaño del objeto de una misma o forma,por ejemplo un círculo de radio 1, sería de un tipo, un círculo de radio 2 sería otro tipo de objeto.

## CAPÍTULO 3

# ACERCA DEL PROBLEMA DE EMPAQUETAMIENTO

---

En este capítulo se hace una revisión de la literatura acerca de los problemas de empaquetamiento, las distintas formas en que se ha presentado el problema de empaquetamiento, las aplicaciones reales de los problemas de empaquetamiento además de las técnicas que se han utilizado para solucionar el problema.

### 3.1 ACERCA DEL PROBLEMA DE EMPAQUETAMIENTO

Como se mencionó en la introducción, los problemas de empaquetamiento consisten básicamente en acomodar objetos en un contenedor, esta clase de problemas constituyen una familia de problemas de optimización combinatoria aplicados en la ciencia computacional, en la industria, en la logística, en la manufactura y en los procesos de producción.

La literatura existente sobre los problemas de empaquetamiento es muy vasta, pero en esta tesis no se pretende realizar una revisión completa de la literatura, pero si un resumen de los enfoques que suponemos mas interesantes, haremos énfasis en los problemas de dos y tres dimensiones, tratando de abordar problemas de empaquetamiento que puedan existir en el mundo real y que tengan relación con el problema que se aborda en esta investigación.

Diversos enfoques han sido planteados en la literatura para el problema de

empaquetamiento, según el objetivo de estos enfoques, el acomodo de los objetos o el tamaño del contenedor puede variar, un enfoque al problema puede ser cuando se tienen un conjunto previamente dado de objetos establecer el contenedor mas apropiado, entonces el objetivo o criterio a optimizar puede ser:

- Minimizar el perímetro del contenedor
- Minimizar el área del contenedor
- Teniendo una dimensión fija del contenedor, minimizar la otra dimensión, esto se ha visto en problemas de empaquetamiento por tiras

En esta investigación tratamos con un problema empaquetamiento donde los objetivos pueden ser minimizar el desperdicio al momento de empacar o maximizar el área o volumen cubierto por los objetos o maximizar un valor que tengan los objetos empacados (por ejemplo un valor económico).

También se considera una variante del problema de empaquetamiento, llamada telescopia, la cual es colocar objetos dentro de otros objetos [41], [38], también es conocido como recursive packing [43] o incluso nesting (el termino nesting también se aplica a empaquetamiento de objetos irregulares o aquellos empaquetamientos sin clasificar [7]).

Para los problemas de empaquetamiento y de corte ha habido esfuerzos en crear un sistema de clasificación (tipología), en [16] se hace referencia a una clasificación que puede tomar en cuenta el objetivo, los tipos de objetos (si todos son iguales o diferentes), dimensionalidad, etc., y en [53], para esta investigación se ha optado por una clasificación más simple que toma en cuenta la forma y la simetría del objeto ya que forma y simetría, regularidad definen el método en que se detecta la intersección de un objeto con otro, el objetivo para este modelo como se verá en posteriores capítulos siempre es el mismo, la maximización del peso de los objetos, cada objeto tiene un peso  $W_k$  que aportar dentro del contenedor, para cada tipo  $k$ .

(Clasificación de acuerdo a sus segmentos o lados.)

- a Objetos planos.- son los poseen puramente lados rectos llamados polígonos , como son los cuadrados, los rombos etc., en el caso de tres dimensiones son llamados poliedros y tienen solamente caras planas como el cubo, cuboide etc..
- b Objetos curvos.- Estos no tienen lados o caras rectos, como son los círculos y las elipses, o las esferas en el caso de tres dimensiones.
- c Existen otras figuras que podrían tener lados rectos pero también segmentos no lineales, como puede ser un semicírculo o un círculo truncado como el descrito en el capítulo 5.

(Clasificación de acuerdo a los ángulos internos del objeto.)

- Regulares .- son los que poseen todos sus ángulos internos iguales, el círculo es también considerado una figura regular a pesar de no tener lados.
- Irregulares .- sus ángulos internos no son iguales (polígonos irregulares).

(Clasificación de acuerdo a la simetría axial del objeto.)

- Simétricos.- este puede ser un objeto completamente simétrico como un círculo, o también puede ser un polígono regular, estos objetos son definidos básicamente con un parámetro, ya sea el radio del círculo, o el apotema para el polígono.
- Asimétricos, estos pueden ser por ejemplo las elipses o los rectángulos, para describir una elipse o un rectángulo se necesitan al menos dos parámetros, por ejemplo los semiradios de las elipses o el largo y el ancho del rectángulo.



## 3.2 APLICACIONES DEL PROBLEMA DE EMPAQUETAMIENTO

### 3.2.1 OBJETOS PLANOS

El empaquetamiento de objetos planos es muy común, desde el empaquetamiento de cajas u objetos rectangulares ya que una buena utilización de la capacidad de los vehículos puede minimizar el numero de vehículos de transporte [23][13], aunque también podría ser el transporte de objetos como los perfiles usados en la construcción e incluso tubos octagonales (fig. 3.1).

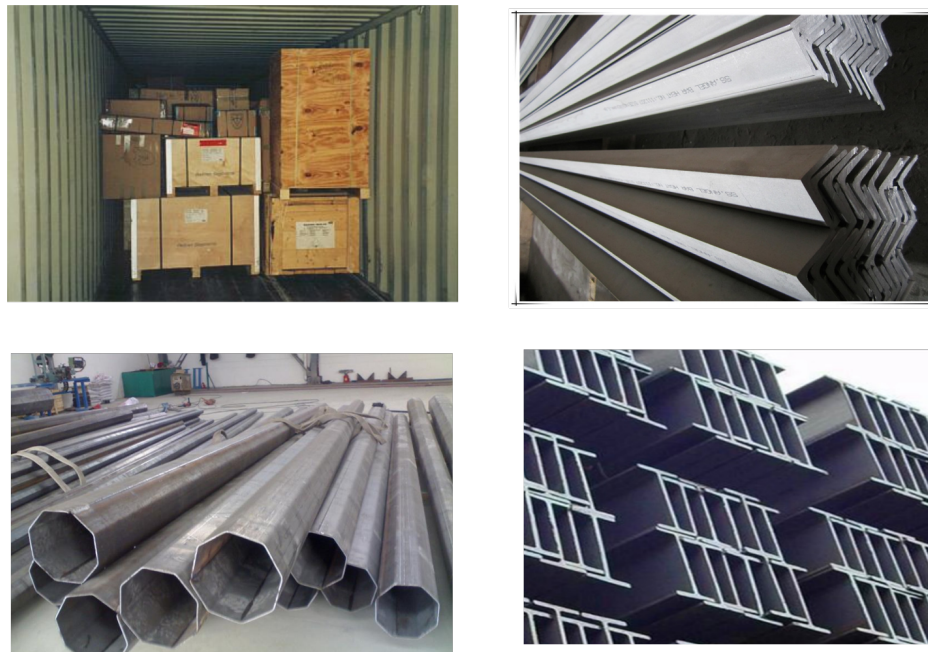


Figura 3.1: Aplicaciones del problema empaquetamiento

Una de las aplicaciones del problema de empaquetamiento es cuando este visto también como un problema de corte, estos problemas de corte pueden ser encontrados frecuentemente en la industria, en diferentes procesos como son el corte de papel, de rollos de aluminio, placas de fibras de vidrio, hojas de metal, etc. (fig. 3.3) , el objetivo de estos problemas puede ser en determinar el mejor camino para cortar

y producir los objetos que han sido pedidos de acuerdo a ciertos requerimientos u objetivos (fig. 3.2).

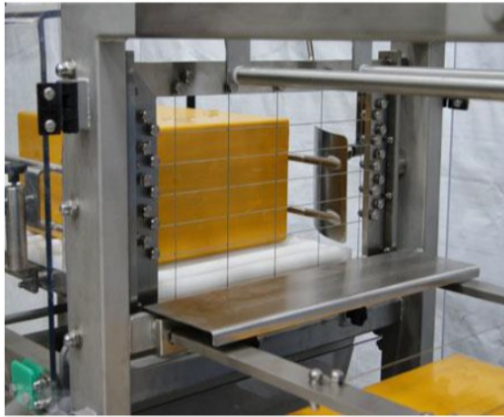


Figura 3.2: Corte en 3 dimensiones

En el trabajo [3] se estudia un problema de corte con guillotina de dos dimensiones y dos estaciones, en cada estación o fase se hace un corte en una placa, en la primera estación se hace un corte longitudinal a través de la placa, produciendo tiras, en la segunda estación se hace un corte transversal a estas tiras produciendo los objetos rectangulares, en el mismo problema el material sobrante del corte puede no ser necesariamente basura si este desperdicio es de un tamaño razonablemente grande, este material puede almacenarse para ser usado en el futuro, si el tamaño del material es realmente pequeño puede considerarse basura, el problema es resuelto mediante dos modelos de programación lineal entera, otra aplicación relacionada es el problema de corte longitudinal en troncos de arboles, en [44] se propone un modelo matemático de programación lineal y entera, para este problema y propone dos formas de resolverlo, una metaheurística y la solución del problema usando un solver comercial.

Por ultimo en [6] se desarrolla un modelo de programación entera, para un problema de corte de rectángulos (sin guillotina), basado en discretizar el contenedor mediante una malla.

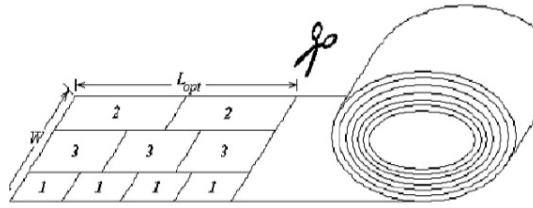


Figura 3.3: Corte de acero o papel

### 3.2.2 OBJETOS CURVOS

El empaquetamiento de objetos con superficies o lados curvos, como son los círculos puede tener aplicaciones en los problemas de cobertura de regiones, otros ejemplos pueden darse en la plantación de árboles para maximizar el área forestal, en sistemas de comunicaciones donde se busca optimizar la localización de antenas para maximizar la cobertura dentro de un área geográfica (fig. 3.4).

También pueden encontrarse aplicaciones en el problema de diseño de cables de cobre o de fibra óptica (puede consultarse [33]), en el almacén de tambos u otros objetos redondos (o elípticos) como tuberías de acero, cobre o barras de aluminio etc. (fig. 3.5 y 3.6) .

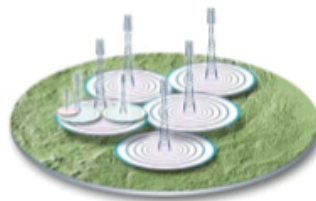


Figura 3.4: Cobertura de antenas

En la industria pueden encontrarse aplicaciones al problema de empaquetamiento de esferas por ejemplo en la medicina [48], [50], en estos trabajos se han considerado tratamientos planeados de radiocirugía para tumores en el cerebro o en los senos, la radiocirugía usa un cuchillo de rayos gamma para crear un conjunto

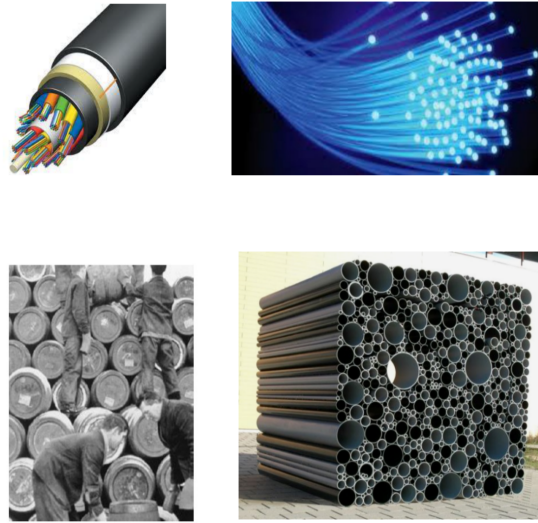


Figura 3.5: Aplicaciones (empaquetamiento de objetos circulares)



Figura 3.6: Otros tipos de objetos curvos

de "shots." destinos sobre el área del tumor donde se lanzara una alta dosis de radiación, la intensidad de la radiación sobre estos puntos puede cambiar según sea la parte del tumor, el procedimiento debe considerar optimizar el número de shots, su

posición y tamaño, para reducir la dosis de radiación pero alcanzar a cubrir el área requerida (fig. 3.7).

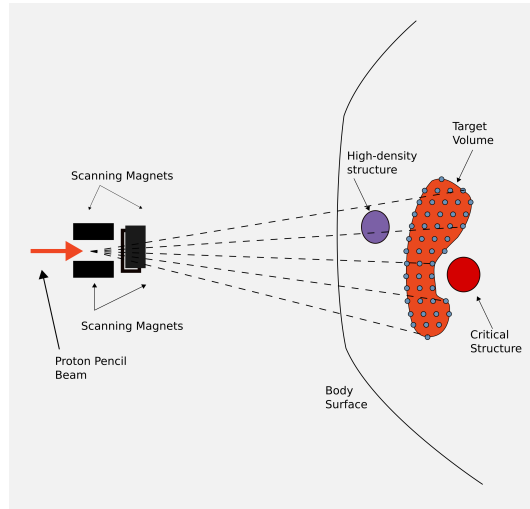


Figura 3.7: Esquema de Radioterapia

### 3.2.3 POSIBLES APLICACIONES PARA EL EMPAQUETAMIENTO CON TELESCOPIA

El caso de empaquetamiento con telescopia, puede presentarse en la industria de fabricación de tubos, donde el envío representa una importante fracción del costo total del producto, por lo que para economizar se colocan tubos dentro de otros, dando lugar al término de telescopia, el objetivo es maximizar el área ocupada dentro del contenedor, el problema de optimización es estudiado en [43] y es resuelto mediante una metaheurística GRASP (ver fig. 3.8).

### 3.2.4 OTRAS APLICACIONES

Otra posible aplicación puede encontrarse en el corte textil, donde los objetos pueden ser de diversas formas y de forma irregular [26],[1], el problema se puede presentar como el empaquetamiento de un conjunto de objetos irregulares en un

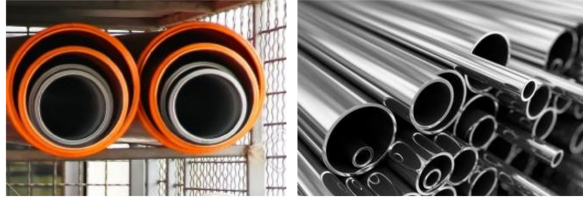


Figura 3.8: Aplicación para el empaquetamiento con telescopia

contenedor rectangular, en el que hay que evitar su solapamiento, el ancho del contenedor esta dado, siendo el objetivo minimizar su longitud. en [7] se presentan una serie de métodos con los que se puede abordar esta clase de problemas (ver fig. 3.9), por ejemplo el método llamado Pixel/Raster, que consiste en cubrir el área de corte en un numero finito de pequeñas zonas rectangulares, logrando con esto definir el área de corte como una matriz, en la que una zona marcada con un 1 puede significar la existencia de una zona de la figura a cortar, un 0 puede significar una zona vacía, sin ningún corte, aunque este método no toma en cuenta la forma del objeto para encontrar las intersecciones, por lo que otros métodos(ej. trigonometría directa) que tomen en cuenta esto, también son presentados en este mismo trabajo.



Figura 3.9: Aplicación en corte textil

En las ciencias el problema también puede ser relevante, por ejemplo en las matemáticas y en la geometría es de interés el conocer la naturaleza que gobierna el empaquetamiento de objetos(la estructura en que se ordenan), siendo esto útil para las ciencias para comprender como se dan los agrupamientos de objetos de forma natural y estos empaquetamientos no son siempre de objetos esféricos, ejemplos de estos problemas se puedan dar como resultado de uno de un proceso de cristalización, como el empaquetamiento de partículas encontradas en placas delgadas o



tubos delgados, en [34] se estudia este problema para hallar posibles estructuras de empaquetamiento como resultado del acomodo de partículas que pueden darse al ser confinadas por ejemplo en los huecos de un material poroso (fig. 3.10).

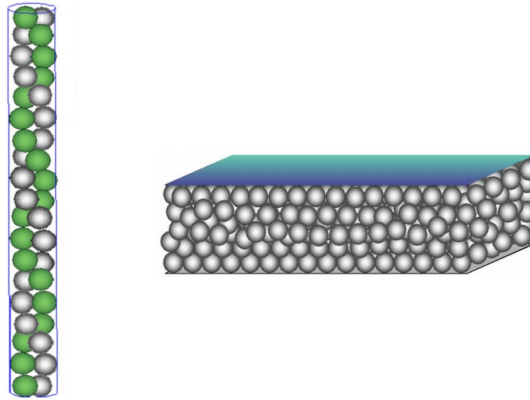


Figura 3.10: Partículas confinadas

En [15] se aborda el tema de empaquetamiento dentro de esta misma línea de estudio de partículas, siendo elipses definidos como una alternativa a los círculos o esferas que en las teorías tempranas sobre materiales granulares es la forma más común en que son vistas idealmente las partículas .

En la ciencia no siempre se considera a las partículas de forma esférica en el trabajo [47], se propone un esquema de optimización que hace uso de diversas herramientas que incluyen métodos de búsqueda estocástica con recocido simulado y de programación lineal, bajo este esquema de optimización se abordan figuras como los pentágonos, los octágonos, los triángulos curvados (fig. 3.11), entre otros objetos que pudieran encontrarse en la organización de células epiteliales, para otras aplicaciones en la física puede consultarse también el trabajo [4].

El problema de empaquetamiento de objetos en tres dimensiones se aborda en [17] donde se aplica en el acomodo de vehículos espaciales y sus módulos y se presenta un método discreto inspirado en el juego de tetris, donde los objetos a empacar son en 3 dimensiones y son paralelepípedos rectangulares y se plantea un modelo de programación entera para resolverlo, en [18] se plantea que el problema

de empaquetamiento pudiera aplicarse a problemas de scheduling (secuenciación de actividades), como pudiera ser la activación de dispositivos cuando su disponibilidad pudiera no ser constante, citando el caso del recurso energético necesario para el funcionamiento de dispositivos eléctricos, estos deben activarse en ciertos periodos de tiempo, entonces esta activación podría programarse de acuerdo a cierto criterio a optimizar (fig.3.12), también en [54] se relaciona el problema de empaquetamiento con problemas de scheduling.

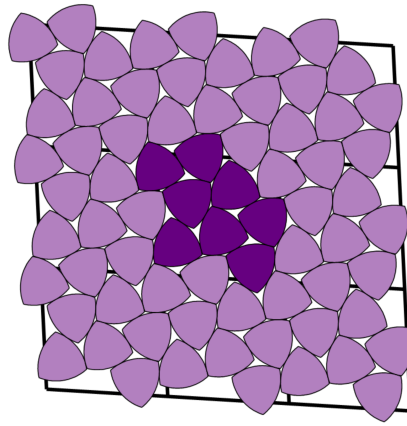


Figura 3.11: Empaquetamiento de triángulos curvados

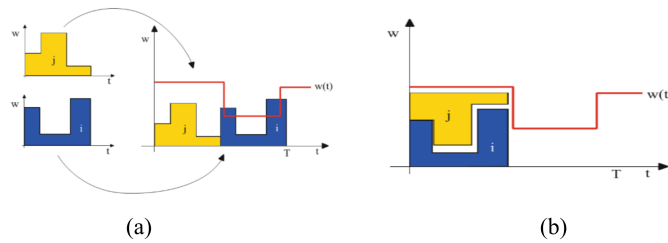


Figura 3.12: Secuenciación y empaquetamiento



### 3.3 MODELOS MATEMÁTICOS Y TÉCNICAS DE SOLUCIÓN

Los métodos y técnicas con los que se ha intentado resolver los problemas de empaquetamiento, han sido desde modelos matemáticos, hasta métodos heurísticos o de inteligencia artificial, el empaquetamiento de objetos circulares ha sido de interés histórico y ha sido descrito como una tarea de gran complejidad, y ha sido abordado desde puntos de vista muy teóricos o matemáticos, pero la investigación de operaciones retoma el problema de empaquetamiento desde un punto de vista más práctico, algunas de las técnicas que se han dado para solucionar problemas de empaquetamiento son brevemente explicadas en esta tesis, debido a que son un buen marco teórico para la construcción del modelo matemático empleado en esta tesis.

Una de los primeros trabajos que abordan el empaquetamiento de objetos curvos como el círculo se encuentra en [33] y [22], en [33] se resuelve el problema de empaquetamiento de círculos en un contenedor circular, el objetivo era minimizar el radio del círculo que pudiera contener  $n$  círculos dados, ofrece fórmulas matemáticas para obtener este radio, en algunos casos resultados exactos pero en su mayor son empíricos, en [22] se trata el problema del contenedor cuadrado, ambos abordan problemas de empaquetamiento muy simples donde solo se tiene un tipo de círculo. otros trabajos ofrecieron métodos y modelos más elaborados permitiendo más de un tipo de círculo, en [28] se presenta un contenedor circular, en [29] con contenedores de distintas formas por ejemplo el rectangular y en [14] técnicas de recocido simulado para la solución del problema.

Son los métodos que utilizan modelos matemáticos los que más interés tienen en esta tesis, son el marco teórico en esta investigación. Una revisión acerca de los métodos y modelos para el empaquetamiento de esferas y círculos puede encontrarse en el trabajo [27], [9] donde se presentan algunos modelos matemáticos no lineales para el caso de círculos del mismo radio, en contenedores circulares, rectangulares y triangulares.

En el modelo [24] el objetivo del problema es minimizar el parámetro  $R$  que define a un contenedor  $C(R)$  con  $n$  objetos. El modelo se presenta de la siguiente

forma general para cualquier objeto:

Función objetivo:

$$\min : R$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} D_i(\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{it}) &\subseteq C(R) & i, \dots, n \\ D_i^0(\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{it}) \cap D_j^0(\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jt}) &= \emptyset & i \neq j \end{aligned}$$

donde  $D_i$  define a los objetos, la posición de los objetos en el espacio es definida por los parámetros  $\alpha_{it}$ , en el caso de dos dimensiones  $t = 2$  y estos se podrían definir en el caso de los círculos como las coordenadas del centro de los objetos, la primer restricción establece que los objetos deben estar dentro del contenedor y la segunda que no debe haber intersección entre estos, en esta misma restricción  $D_i^0$  se define como el interior del objeto, así que esta restricción permite la tangencia entre objetos.

De forma mas especifica se puede formular el modelo para el caso de objetos circulares, se utiliza en este modelo las coordenadas  $(x_i, y_i)$  del centro de cada círculo  $i$  situado en el contenedor como variables del problema.

Función objetivo:

$$\min : R$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} \sqrt{x_i^2 + y_i^2} + r_i &\leq R & i, \dots, n \\ 2 * r_i &\leq d_{ij} & \{i, j\} = 1, \dots, n \quad i < j \end{aligned}$$

El valor de  $d_{ij}$  (el cual es la distancia de los centros entre un par de objetos circulares) se calcula como:

$$\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \tag{3.1}$$

Esta distancia  $d_{ij}$  es conocida como la norma euclidiana, en como la norma forma parte del modelo (como una restricción) este es no lineal, además de no convexo, en este modelo los objetos solo pueden un radio y el contenedor es un círculo, otros

modelos semejantes permiten el uso de contenedores de otras formas por ejemplo en [12] se presenta un modelo para el caso de un contenedor cuadrado de área unitaria, el modelo se presenta a continuación:

Función objetivo:

$$\text{Maximizar} \quad r \quad (1)$$

Sujeto a:

$$r \leq x_i \leq 1 - r \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

$$r \leq y_i \leq 1 - r \quad i = 1, \dots, n \quad (3)$$

$$\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \geq 2r \quad 1 \leq i < j \leq n \quad (4)$$

En este modelo se tiene nuevamente las coordenadas del centro del objeto como variables  $(x_i, y_i)$ , se tiene ademas un conjunto de  $n$  círculos a colocar en el contenedor, el objetivo es maximizar el radio  $r$  de los objetos y todos los objetos tienen el mismo radio, las restricciones 2 y 3 impiden que los objetos salgan del contenedor (rebasen la frontera del contenedor), la norma euclidiana sigue siendo una restricción del problema (4).

El contenedor rectangular es abordado en [10] con un modelo no lineal como los anteriores y en el caso de este modelo se busca más la factibilidad que la optimización, ya que se tiene como parámetro del problema la cantidad  $n$  de objetos a empaquetar, las dimensiones del rectángulo  $W, L$  y los radios de los objetos, el problema busca el mayor solapamiento calculado para una solución y entonces el problema de optimización se da cuando se intenta calcular una solución donde ese solapamiento máximo sea minimizado, una solución factible se encuentra en el momento que el solapamiento es igual a cero, el problema de saber cual es el máximo de objetos que se puede empaquetar en el contenedor dado se hace mediante un proceso iterativo, en el que se puede incrementar un objeto en cada iteración.

Función objetivo:

$$\text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^n \max(0, (2r)^2 - \|p^i - p^j\|) \quad (1)$$

$$r \leq p_1^i \leq d_1 - r \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

$$r \leq p_2^i \leq d_2 - r \quad i = 1, \dots, n \quad (3)$$

En este modelo  $p^1, \dots, p^n$  representan los centros de los círculos, las coordenadas

$x$  y  $y$  son representadas como  $p_1^i$  y  $p_2^i$  respectivamente, las dimensiones en dirección  $x$  y  $y$  del contenedor son los parámetros  $d_1$  y  $d_2$  del modelo, la función objetivo es la restricción que utiliza la norma que hemos ya empleado otros modelos expresada matemáticamente en la ecuación  $\|p^i - p^j\|_2^2$

En este modelo se restringe en (2) y (3) el solapamiento con la frontera , pero se restringe el solapamiento entre objetos en función objetivo como un dato a minimizar.

El modelo presentado en [21] permite la ubicación de objetos circulares de radios diferentes en un contenedor rectangular, es un problema entero mixto ya que utiliza una variable binaria para definir si el círculo está dentro o no y las variables  $x_i$  y  $y_i$  que identifican las coordenadas  $x$  y  $y$  respectivamente de los posibles círculos.

Función objetivo:

$$\text{Maximizar} \quad c_i \gamma_i \quad (1)$$

Sujeto a:

$$\gamma * r_i \leq x_i \leq \gamma(1 - r_i) \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

$$\gamma * r_i \leq y_i \leq \gamma(1 - r_i) \quad i = 1, \dots, n \quad (3)$$

$$\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \geq (r_i + r_j) \quad 1 \leq i < j \leq n \quad (4)$$

$$x_i \geq 0, y_i \geq 0, \gamma_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, n$$

Los modelos anteriores son no convexos y no lineales ,además los objetivos de estos modelos no siempre son la maximización de la cantidad de objetos, pero son útiles para conocer las características que uno modelo de empaquetamiento debe tener, notar que todos estos modelos utilizan alguna forma de la norma euclidiana para calcular si existe o no solapamiento.

El modelo presentado en esta investigación tiene como base de referencia el trabajo de [6], en el cual se desarrolla un modelo matemático para un problema de corte con guillotina de formas rectangulares, un problema que puede ser semejante al de empaquetamiento, se hace uso de la discretización del contenedor con una malla ficticia en donde cada nodo de la malla puede ser punto de inicio de corte de un objeto, en base a esto se desarrolla un modelo matemático y se resuelve el problema mediante el uso de la relajación lagrangeana y un árbol de búsqueda en el modelo

para calcular una cota.

Otras referencias importantes sobre el problema de empaquetamiento pueden encontrarse en [7] donde se estudia la geometría de los objetos y se presentan diversos métodos para manejar la geometría de objetos complejos para poder generar soluciones factibles en empaquetamientos con estos objetos por ejemplo el método pixel/raster donde el contenedor se divide en una malla o cuadrícula y de acuerdo al lugar donde el objeto es colocado este cruzará celdas de la cuadrícula y estas tomarán el valor de 1 (0 si no) [42], bajo esta técnica en [5] se presentan algoritmos genéticos y heurísticas que sirven para obtener buenas soluciones, otros ejemplos son el uso de trigonometría [32],[2] y la descomposición de objetos en objetos más simples [51] en donde se menciona el concepto NFP (Nofit Polygon) un concepto que pretende simplificar los tiempos de cálculo para detectar si un objeto está superpuesto, en [8] se desarrolla una heurística para buscar buenas soluciones a partir de un concepto relacionado con esta técnica, en [11] se desarrolla con este mismo enfoque un algoritmo de recocido simulado para obtener buenas soluciones al problema.

## CAPÍTULO 4

# MODELO MATEMÁTICO

---

En este capítulo se aborda el Modelo Matemático de esta investigación, se explica cada restricción que hace y como funciona esta, para que tipo de problemas puede ser útil el modelo, que características deben tener los objetos y que tipos de empaquetamiento puede realizar.

## 4.1 SOBRE LAS CARACTERÍSTICAS DEL MODELO MATEMÁTICO

Para construir el modelo matemático para el problema de empaquetamiento de esta investigación, se cubre el contenedor que contendrá los objetos con una malla, en donde cada nodo de la malla supone la posible colocación de un objeto en un punto de este denominado como pivote, este modo permite conocer de antemano todas las posibles intersecciones de los objetos dados dos puntos de la malla en un precalculo y no durante la etapa de construcción del modelo, se pueden saber también si los objetos tendrán intersecciones con las paredes o frontera del contenedor, la fig.4.1 muestra una malla construida para un contenedor rectangular de dimensiones  $W$  y  $L$ .

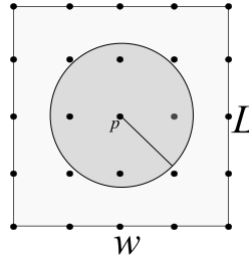
Ya que tenemos el diseño de malla podemos establecer en que nodos podría haber solapamiento entre objetos usando la norma vectorial de la clase de objeto que estemos empacando, en el caso de objetos geométricos regulares tales como círculos, cuadrados, rombos, o semiregulares como los elipses), la norma  $d$  se obtiene

utilizando el parámetro  $R$ (radio del objeto en caso de objeto circular), teniendo esta norma es posible saber facilmente si existe o no intersección entre un par de objetos colocados en los puntos  $i,j$  de la malla usando la siguiente formula:

$$R_i + R_j < d_{ij} \quad (4.1)$$

Entonces la intersección queda establecida cuando la sumatoria de radios es estrictamente menor a la norma, los objetos en este caso se consideran sobrepuestos cuando tienen intersección parcial o están completamente dentro de otro, en esta definición la tangencia entre objetos no se considera intersección, para corregir problemas de precisión en los cálculos se puede usar un valor de tolerancia que permita un solapamiento mínimo, si se utiliza la norma para definir  $N_{ik}$  los objetos pueden ser de diferentes tipos(escala) , pero no de diferentes clases(forma), en este caso o en el que se tengan clases de objetos en los que no se tiene o no se puede establecer la norma se deben usar otras técnicas que pueden consultarse en el capitulo 5 de esta tesis.

Figura 4.1: Malla para modelo sin frontera



El modelo matemático que se construye bajo este enfoque de construcción de malla, tiene las siguientes características, es entero, es lineal y es convexo, esto permite la utilización de un solver comercial como cplex (u otros solvers). Como se ha mencionado antes otros modelos matemáticos (ej. Birgin et al.[10](2003)), utilizan directamente las coordenadas de los centros de los círculos como variables, pero los modelos resultantes acaban siendo no convexos o no lineales (como en el caso del empaquetamiento de círculos).

## 4.2 MODELO MATEMÁTICO, STANDARD

El problema de empaquetamiento de objetos(para una misma clase o forma) y utilizando el conjunto  $N_{ik}$  definir solapamientos puede ser establecido por medio de la programación entera lineal con el modelo siguiente:

Función objetivo:

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} W_k x_i^k \quad (1)$$

Sujeto a:

$$m_k \leq \sum_{i \in I} x_i^k \leq M_k \quad k \in K \quad (2)$$

$$\sum_{k \in K} x_i^k \leq 1 \quad i \in I \setminus F \quad (3)$$

$$R_k x_i^k \leq \min_{j \in F} d_{ij} \quad i \in I, k \in K \quad (4)$$

$$x_i^k + x_j^l \leq 1 \quad \text{para } i \in I, k \in K, (j, l) \in N_{ik} \quad (5)$$

$$x_i^k \in 0, 1 \quad i \in I, k \in K \quad (6)$$

Donde  $x_{ik}$ , es una variable binaria que define si en el punto  $i$  de la malla hay un objeto del tipo  $k$  ( $x_{ik} = 1$  si existe objeto,  $x_{ik} = 0$  si no existe),  $W_k$  es un parámetro que define el valor del objeto, o su contribución al valor objetivo(esteste valor podría ser por ejemplo el área del objeto),  $R_k$  es el radio para el tipo de objeto,  $m_k$  es la cantidad de objetos mínimos necesarios de tipo  $k$  y  $M_k$  es la máxima cantidad que se pueden colocar en el contenedor del tipo de objetos  $k$ ,  $d_{ij}$  es un parámetro para objetos regulares o semiregulares es la norma vectorial del tipo de objeto entre un par de nodos, en el caso de los círculos es la norma euclidiana,  $I$  define el conjunto de nodos  $i$  que existen en la malla  $F$  define el conjunto de nodos  $i$  que se encuentran en la frontera del contenedor,  $K$  es el conjunto de tipos  $k$  de objetos existentes.

La función objetivo(1) es maximizar la suma de la contribución de los objetos que se han colocado dentro del contenedor, si el valor  $W_k$  se define como el área del objeto, entonces el objetivo puede definirse como maximizar el área ocupada por los objetos, si los objetos son de un solo tipo (o escala), entonces el objetivo puede reducirse a maximizar la cantidad de objetos.



La restricción(2), define la cantidad mínima y máxima de objetos del tipo  $k$  que pueden existir dentro del contenedor.

la restricción(3), establece que en un nodo  $i$  solo puede haber un objeto o ninguno, se excluye la revisión en los puntos que son frontera.

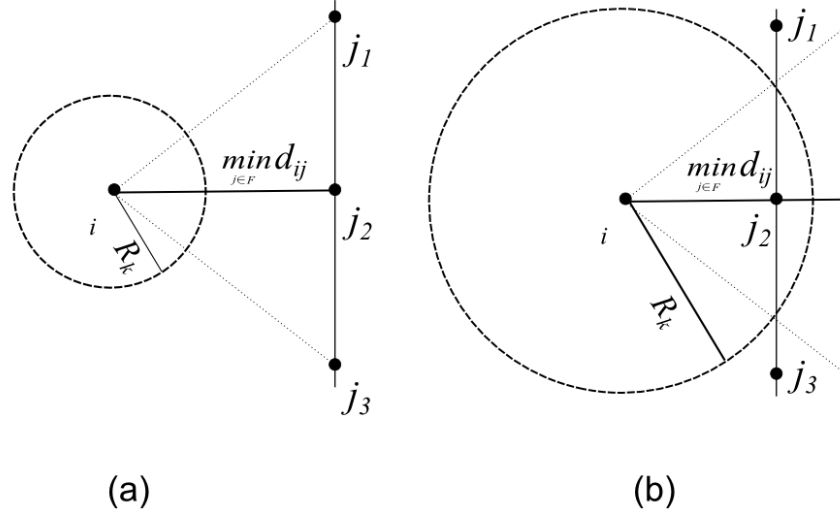


Figura 4.2: (a) objeto está dentro del contenedor, (b) objeto esta fuera del contenedor

La restricción(4) establece que ningún objeto puede salirse del contenedor(ver figura), esto lo hace comparando el radio del objeto  $i$  con la distancia desde ese punto a los puntos que están en la frontera (ver figura), el radio del objeto debe ser mayor que la distancia mínima que se tiene con la frontera de puntos.

La restricción(5) establece que si en un nodo  $i$  con un objeto de radio  $k$  existe la posibilidad de intersección con un nodo  $j$  con un objeto de radio  $l$ , entonces solo puede ponerse colocarse un objeto o ninguno (ver fig.4.3), esta restricción hace uso del conjunto  $N_{ik}$ , en este conjunto están todas las combinaciones posibles donde pueda haber intersección,  $i$  y  $k$  son los subíndices del nodo y del radio en el que se hace la comparación con los demás nodos de la malla, si se consideran objetos geométricos regulares o semiregulares en donde se pueda obtener la norma vectorial,

el conjunto  $N_{ik}$  quedaría definido como:

$$N_{ik} = \{j, l : i \neq j, d_{ij} < R_k + R_l\} \quad (4.2)$$

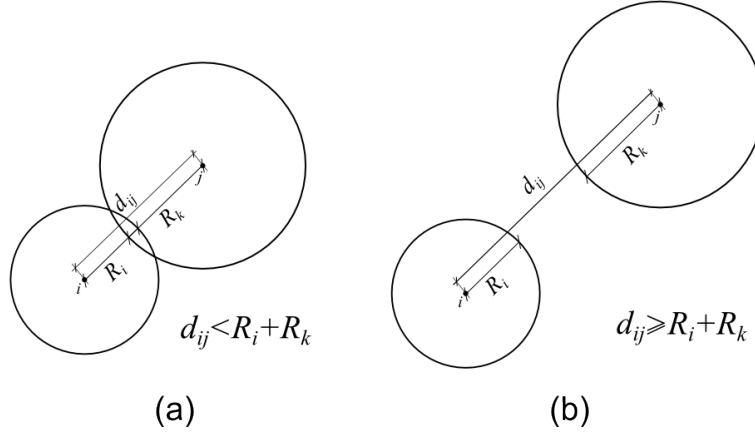


Figura 4.3: (a) Para  $(i, k)$  con  $(j, l) \in N_{ik}$ , (b) para  $(i, k)$  con  $(j, l) \notin N_{ik}$

Por la definición del conjunto  $N_{ik}$ , se establece que existe intersección cuando la norma es menor que la sumatoria de radios de los objetos que están en  $i$  con radio  $k$  y en  $j$  con radio  $l$ , se excluye del conjunto el caso cuando  $i = j$ .

La restricción(6) define la naturaleza de las variables, en este modelo son binarias.

#### 4.2.1 REDUNDANCIAS

El modelo matemático puede ser reducido eliminando las restricciones que aparecen en el mas de una vez, por ejemplo en la restricción de intersección el modelo no distingue que la pareja de nodos  $(i, j)$  es igual que la pareja de nodos  $(j, i)$

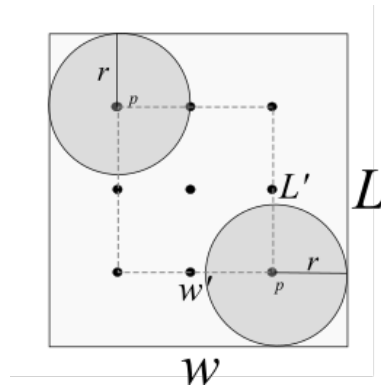
$$\begin{aligned} x_i^k + x_j^l &\leq 1 & i \in I, k \in K, (j, l) \in N_{ik} \\ x_i^l + x_j^k &\leq 1 & j \in I, l \in K, (i, k) \in N_{jl} \end{aligned}$$

### 4.3 MODELO MATEMÁTICO, CASO SIN FRONTERA

Para el caso de instancias donde se tengan un solo tipo de objeto, el modelo puede reducirse a un modelo sin frontera, la restricción (4) es eliminada del modelo Standard, quedando el modelo matemático sin frontera formado por las restricciones (1),(2),(3),(5),(6).

En este caso la malla se define de un modo distinto, quedando esta dentro del contenedor pero sin ningún punto en la frontera, la fig.4.4) muestra el diseño de una malla rectangular de dimensiones  $W$  y  $L$  en donde el tamaño de la malla se reduce en  $W' = W - 2r$  y en  $L' = L - 2r$ .

Figura 4.4: Ejemplo de malla



### 4.4 MODELO MATEMÁTICO, CASO COMPACTO

A partir de la restricción de intersecciones original se puede desarrollar un modelo compacto, reduciendo la cantidad de restricciones de intersección, de manera semejante a como se hace en el problema de locación de plantas de Wolsey[52], esto se hace sumando todas las restricciones de intersecciones de un nodo  $i$  que puede tener un objeto tipo  $k$  con los demás nodos  $j$  con los que puede solaparse, en caso de que estos también tengan un objeto, utilizando la cardinalidad de  $N_{ik} : n_{ik} = |N_{ik}|$

(cantidad de nodos  $j$  que están en el conjunto  $N_{ik}$ ) se excluye este caso, y en caso de ocurrir entonces el nodo  $i$  no puede ser centro de objeto, la restricción de intersección compacta queda entonces como:

$$n_{ik}x_i^k + \sum_{(j,l) \in N_{ik}} x_j^l = n_{ik} \quad \text{para } i \in I, k \in K \quad (7)$$

donde

$$n_{ik} = |N_{ik}|$$

El modelo compacto queda formado entonces por (1),(2),(3),(4),(7) y (6), y si se excluye la frontera (1),(2),(3),(7) y (6).

La restricción compacta se asemeja a la usada por Galiev y Lisafina [20] en 2013, para el caso de empaquetamiento de círculos iguales, para obtener este modelo se sustituye la restricción (5) por esta nueva restricción que se propone es equivalente (proposición 1).

**Proposición 1** Restricción (7) es equivalente a (5).

**Demostración** Si la restricción (5) es cumplida entonces la (7) también debe ser cumplida, si en la restricción (7)  $x_i^k = 1$  se tiene que  $\sum_{(j,l) \in N_{ik}} x_j^l = 0$  para cualquier  $j, l \in N_{ik}$  como en la restricción (5). Si  $x_i^k = 0$  entonces  $\sum_{(j,l) \in N_{ik}} x_j^l \leq n_{ik}$ , lo que hace que ambas sean equivalentes.

$$P_1 = \{x_i^k + x_j^l \leq 1 \text{ para } i \in I, k \in K, (j, l) \in N_{ik}\}$$

$$P_2 = \{n_{ik}x_i^k + \sum_{(j,l) \in N_{ik}} x_j^l = n_{ik} \text{ para } i \in I, k \in K\}$$

El modelo resultante con esta sustitución sería de menor tamaño que con la restricción original (5), sin embargo este nuevo grupo de restricciones es más débil que el original por lo que el modelo podría no beneficiarse con esta formulación compacta (proposición 2).

**Proposición 2**  $P_1 \subset P_2$

**Demostración** La restricción (7) es obtenida por la suma agrupada de las restricciones de la (5), para demostrar que  $P_1 \subset P_2$  debemos encontrar un punto de  $P_2$  que no esté en  $P_1$ .

Tomemos la definición  $N_{ik} = \{j, l : i \neq j, d_{ij} < R_k + R_l\}$  por lo tanto if  $(j, l) \in N_{ik}$  then  $(i, k) \in N_{jl}$ , si dos puntos  $(i, k)$  y  $(j, l) \in N_{ik}$  tal que  $n_{ik}, n_{jl} \geq 2$  si establecemos todas las variables como iguales a cero excepto  $x_i^k, x_j^l$ , las restricciones en (5) podrán ser cumplidas fácilmente y la restricción compacta quedaría:

$$n_{ik}x_i^k + x_j^l = n_{ik}, \quad n_{jl}x_j^l + x_i^k = n_{jl} \quad (4.3)$$

sabemos que  $n_{ik}, n_{jl} \geq 2$ , sustituyendo y despejando  $x_i^k, x_j^l$  en restricciones obtenemos:

$$x_i^k = \frac{n_{jl}(n_{ik} - 1)}{n_{jl}n_{ik} - 1}, \quad x_j^l = \frac{n_{ik}(n_{jl} - 1)}{n_{jl}n_{ik} - 1} \quad (4.4)$$

sumando ambas variables obtenemos:

$$x_i^k + x_j^l = 1 + \frac{1+n_{jl}n_{ik}-n_{jl}-n_{ik}}{n_{jl}n_{ik}-1} \quad (a)$$

$$1 + \frac{1+n_{jl}n_{ik}-n_{jl}-n_{ik}}{n_{jl}n_{ik}-1} > 1 \quad (b)$$

La expresión en (b) nos indica una violación de la restricción (5) por lo que se demuestra que  $P_1 \subset P_2$ , entonces el modelo standard es mas fuerte que el modelo compacto, en el capitulo 8 se hace una demostración de esta proposicion comparando ambas formulaciones experimentalmente.

## 4.5 MODELO MATEMÁTICO, CON DESIGUALDADES

### VALIDAS

Para este modelo se desarrollaron un par de restricciones (desigualdades validas), para ayudar al solver a alcanzar más pronto la solución óptima, con la agregación de estas desigualdades se obtiene una mejor cota en la relajación lineal lo que se considera un buen indicador para el modelo.

La primer desigualdad valida impide que un nodo este simultáneamente dentro de dos círculos(ver figura 2).Esta restricción nos dice que si existe un nodo en  $i$ , que pueda estar cubierto de un objeto que este ubicado en  $j_1$  y simultáneamente cubierto

también por otro objeto ubicado en  $j_2$ , entonces debe obligarse a que solo uno o ninguno de estos objetos pueda estar dentro del contenedor, esta restricción por su similitud a las restricciones de cubrimiento, es también llamada point-covering, la restricción queda entonces como:

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in J} \alpha_{ij}^k x_j^k \leq 1 \quad i \in I \quad (8)$$

El parámetro  $\alpha_{ij}^k$  es una matriz binaria, de parámetros, que indican si un nodo  $j$  es cubierto por un objeto posicionado en nodo  $i$ ,  $\alpha_{ij}^k = 1$  si el nodo  $j$  es cubierto,  $\alpha_{ij}^k = 0$  en caso de no estarlo.

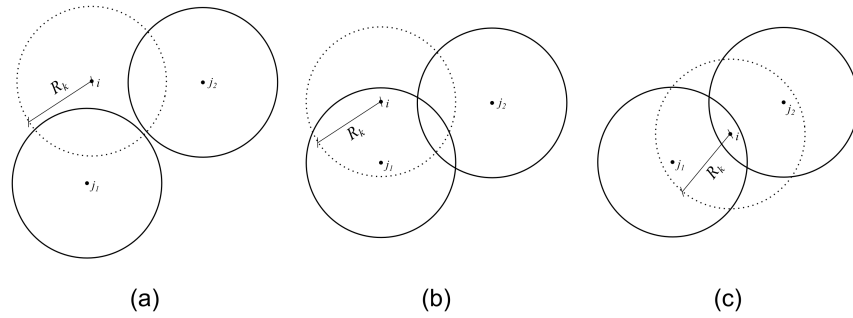


Figura 4.5: Desigualdad valida 1 se cumple en (a) y (b), cubrimiento 1 pero no se cumple en (c).

La matriz de coeficientes  $\alpha_{ij}^k$ , indica que si en un punto  $i$  la distancia a otro punto  $j$  es menor al radio de objeto  $k$ , la respuesta es  $\alpha_{ij}^k = 1$ , la restricción calcula la suma de los puntos  $j$  que están a una distancia menor a un radio de objeto  $k$ , lo que establece cuantos objetos  $k$ , cubren a ese punto  $i$ , restringiendo entonces que esta suma sea menor o igual a 1. La fig 4.5 en el caso (a) establece que ese punto no es cubierto por ningún punto  $j$ , el caso (b) establece que ese punto es cubierto por un círculo  $j_1$ , estos primeros dos casos cubren con la restricción, pero el caso (c) se indica cubrimiento del punto  $i$  por los dos puntos  $j$  pertenecientes a dos círculos distintos por lo que no se cumple la restricción, observad que el caso b los círculos se

solapan a pesar de cumplir con el cubrimiento por lo que esta restricción no puede sustituir a la de intersecciones.

La segunda restricción, restringe a que no haya un círculo  $j$  dentro de un círculo asignado en  $i$ , esto lo hace obligando a que los nodos  $j$  que sean cubiertos por un objeto ubicado en  $i$ , no puedan tener un círculo como se puede observar en la fig.4.6), la restricción que define esta condición sería entonces:

$$x_i^k + \sum_{j: d_{ij} < R_k} x_j^k \leq 1 \quad \text{para } i \in I, k \in K \quad (9)$$

Como comprobación de esta restricción, podemos suponer que existe un objeto en  $i$  de tipo  $k$ , esto es  $x_{ik} = 1$ , la segunda parte de la restricción ( $\sum_{j: d_{ij} < R_k} x_j^k$ ) suma todos los objetos  $j$  que están cubiertos por el objeto ubicado en  $i$ , y como se supone que no debe haber un objeto en el área cubierta por el objeto en  $i$ , la sumatoria ( $\sum_{j: d_{ij} < R_k} x_j^k = 0$ ) tiene que dar cero, para poder posicionar el objeto en  $i$ .

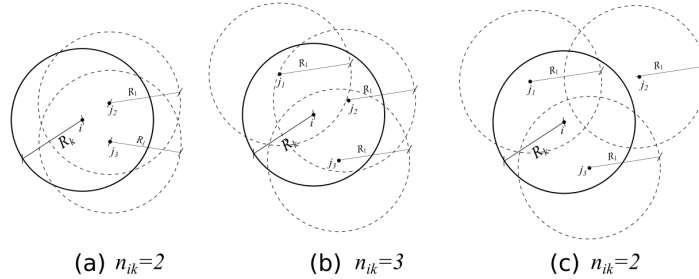


Figura 4.6: (a) desigualdad valida 2 no se cumple, (b) desigualdad valida 1 cumplida.

La segunda desigualdad valida, tampoco puede sustituir a la restricción de intersecciones ya que solo involucra puntos dentro del círculo imaginario  $i$ , puntos fuera de ese círculo no son involucrados, por lo que un círculo en  $j$  situado fuera del área del cubrimiento del círculo situado en  $i$  puede intersectarlo (ver caso (c) en fig.4.6). Como se puede concluir, las dos desigualdades validas, no sustituyen a la restricción de intersección, pero su introducción como restricciones adicionales al modelo, pueden ayudar a que el solver resuelva los problemas más rápido, debido a

que mejoran la relajación lineal resultante de las instancias, la cual es muy pobre sin la introducción de estas desigualdades.

Para obtener un modelo con desigualdades validas, se agrega una o las dos de estas restricciones al modelo Standard o el Compacto que pueden ser:

Standard:

(1)(2)(3)(4)(5)(6)(8)(9) (CC) con ambas desigualdades

(1)(2)(3)(4)(5)(6)(8) (C1) con desigualdad valida 1

(1)(2)(3)(4)(5)(6)(9) (C2 )con desigualdad valida 2

Compacto:

(1)(2)(3)(4)(5)(7)(8)(9) (CC)con ambas desigualdades

(1)(2)(3)(4)(5)(7)(8) (C1) con desigualdad valida 1

(1)(2)(3)(4)(5)(7)(9) (C2) con desigualdad valida 2

Estas formulaciones podrían omitir la restricción de frontera (4) en instancias con un solo tipo de radio, una experimentación para probar el rendimiento de los modelos con desigualdades se encuentra en el capitulo 8.

## 4.6 MODELO MATEMÁTICO, CASO TELESCOPÍA

Con la telescopía, nos referimos a la capacidad del modelo de empaquetar objetos dentro de otros objetos , en este caso el modelo Standard no cambia, la telescopía es contemplada en el modelo solo redefiniendo y renombrando el conjunto  $N_{ik}$  como  $\Omega_{ik}$ , entonces el modelo queda finalmente como:



Función objetivo:

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} W_k x_i^k \quad (1)$$

Sujeto a:

$$m_k \leq \sum_{i \in I} x_i^k \leq M_k \quad k \in K \quad (2)$$

$$\sum_{k \in K} x_i^k \leq 1 \quad i \in I \setminus F \quad (3)$$

$$R_k x_i^k \leq \min_{j \in F} d_{ij} \quad i \in I, k \in K \quad (4)$$

$$x_i^k + x_j^l \leq 1 \quad \text{para } i \in I, k \in K, (j, l) \in \Omega_{ik} \quad (5)$$

$$x_i^k \in 0, 1 \quad i \in I, k \in K \quad (6)$$

Para definir de este nuevo conjunto  $\Omega_{ik}$  se necesita saber si el objeto se sobre-  
pone a otro objeto sin estar dentro de el, esto puede conocerse si se tiene la norma  
vectorial, este solapamiento parcial queda definido como:

$$R_k - R_l < d_{ij} < R_k + R_l \quad (\text{intersección}) \quad (4.5)$$

En nueva definición de intersección se establece que esta existe cuando tienen  
intersección parcial entre objetos y agrega una condición adicional además de la  
sumatoria de radios, la cual es que la norma debe ser mayor que el valor absoluto  
de la diferencia de radios de los objetos, esta condición es estrictamente mayor ya  
que se debe permitir la tangencia entre objetos, al igual que se tenía cuando solo se  
contemplaba una sola condición, el caso cuando  $i = j$  no esta excluido ya que puede  
un nodo tener mas de un objeto a diferencia del caso sin telescopía, la restricción  
(3) del modelo Standard se elimina en el modelo con telescopía, el conjunto de in-  
tersecciones es renombrado como  $\Omega$  y es establecido como:

$$\Omega_{ik} = \{j, l : k \neq l, |R_k - R_l| < d_{ij} < R_k + R_l\} \quad (4.6)$$

Otra forma de ver este caso especial de intersección es estableciendo cuando no  
existe telescopía, y esta no existe bajo estos supuestos, que el objeto  $i$  sea externo al  
objeto  $j$  o que el objeto  $i$  este dentro del objeto  $j$  (o viceversa) y estas dos condiciones

pueden establecerse como:

$$d_{ij} \geq R_k + R_l \text{ o } d_{ij} \leq |R_k - R_l| \quad (\text{no intersección}) \quad (4.7)$$

Entonces el caso de intersección puede definirse como el caso inverso del anterior:

$$\neg(d_{ij} \geq R_k + R_l \text{ o } d_{ij} \leq |R_k - R_l|) \quad (\text{intersección}) \quad (4.8)$$

De esta forma  $\Omega$  queda definido como:

$$\Omega_{ik} = \{j, l : k \neq l, \neg(d_{ij} \geq R_k + R_l \text{ o } d_{ij} \leq |R_k - R_l|)\} \quad (4.9)$$

## 4.7 MODELO MATEMÁTICO, OBJETOS CON ESPESOR

El último modelo para mostrar es el que permite empaquetar el caso de objetos con espesor  $t$  para el caso de telescopía, la definición del conjunto  $\Omega_{ik}$  se redefine de nuevo como:

$$\Omega_{ik} = \left\{ j, l : \begin{array}{l} \text{área}(O_i) \leq \text{área}(O_j) : |R'_k - R_l| < d_{ij} < R_k + R_l \text{ o} \\ \text{área}(O_j) \leq \text{área}(O_i) : |R_k - R'_l| < d_{ij} < R_k + R_l \end{array} \right\} \quad (4.10)$$

Donde  $O_i$  y  $O_j$  son objetos colocados en punto  $i$  y en punto  $j$  respectivamente donde  $R'_l = R_l - t_l$  y  $R'_k = R_k - t_k$  ( $t_k$  y  $t_l$  son los espesores de los objetos).

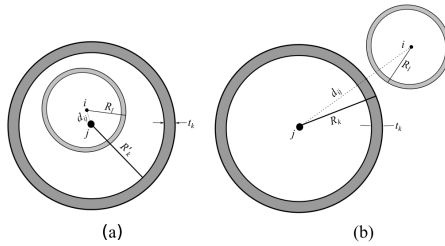


Figura 4.7: (a) cubrimiento 2 no se cumple, (b) cubrimiento 1 cumplido

La fig. 4.7 ilustra el caso de tomar el espesor, en (a) se muestra el caso de telescopía con borde y en (b) el caso de intersección sin telescopía y como no se

---

altera el modelo por los espesores, en este caso de empaquetamiento también se elimina la restricción (3) del modelo Standard.

Hay que considerar que las instancias que tengan objetos de varios tipos pero no considere el empacar objetos dentro de otros el borde sería despreciable.

## CAPÍTULO 5

# OBJETOS CIRCULARES

---

En esta investigación, la norma tiene un papel fundamental en el empaquetamiento de un objeto, a través de ella se realiza la detección de solapamientos, en esta capítulo se detalla como establecer normas que definan diferentes clases de objetos regulares e incluso irregulares que llamamos objetos circulares porque pueden ser descritos mediante una norma como en el caso del círculo, para conocer más acerca de las normas puede consultarse en [31] y [45].

### 5.1 NORMA VECTORIAL

En el capítulo anterior, el método utilizado para saber si dos objetos circulares se solapan era mediante la comparación de sus radios y la distancia euclidiana o norma vectorial entre las coordenadas de sus centros, esto era visualmente comprobable con la figura 4.2. pero este principio no solo es útil para objetos como los círculos, todos los objetos que puedan definirse de forma semejante al círculo, el cual es definido como el conjunto de puntos que se encuentran todos a una misma distancia de un punto dado.

**Definición:** Una norma vectorial es una función que puede definir un espacio, un espacio vectorial normado si cumple ciertos axiomas [30] esto axiomas son:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \|v\| \leq 0 \text{ y } \|v\| = 0 \text{ si y solo si } v = 0 \\
(2) \quad & \|kv\| = |k| \|v\| \\
(3) \quad & \|u + v\| = \|u\| + \|v\|
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Estos axiomas dan lugar a tres importantes normas en  $R^n$  que son:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \|(a_1, \dots, a_n)\|_\infty = \max(|a_i|) \\
(2) \quad & \|(a_1, \dots, a_n)\|_1 = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \\
(3) \quad & \|(a_1, \dots, a_n)\|_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Las cuales en  $R^2$  dan lugar a tres conjuntos de puntos  $D_1, D_2$  y  $D_3$  donde  $D_1$  es el círculo unidad,  $D_2$  es un rombo inscrito en este círculo unidad y  $D_3$  es un cuadrado circunscrito al círculo unidad (fig. 5.1).

Objetos de forma regular como el cuadrado y el rombo pueden ser definidos como espacios normados, en el caso de estos objetos si son simétricos en ambos ejes  $x$  y  $y$  se definen como conjuntos de puntos mediante normas simétricas, otros objetos semiregulares como elipses y rectángulos pueden ser descritos mediante norma asimétricas en estos la simetría es cumplida solo en un eje.

En el capítulo 6 se abordará el tema de usar el modelo en objetos irregulares los cuales no pueden ser definidos con una norma vectorial.

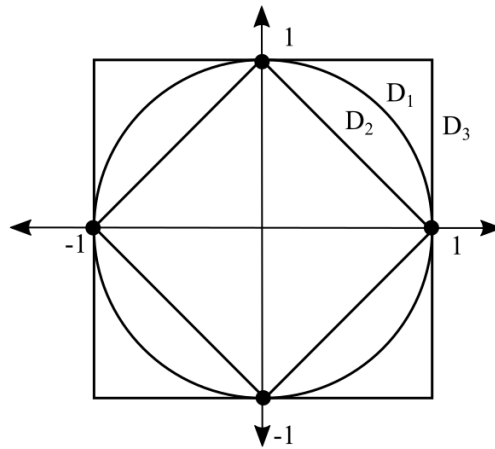


Figura 5.1

## 5.2 NORMAS SIMÉTRICAS

### 5.2.1 CÍRCULO

El modo de establecer una norma que defina un círculo comienza definiendo las restricciones de un círculo con radio  $r$ , el conjunto que define al círculo  $\|z\| \leq a$  donde  $a = r$  y  $a = 1$  se establece entonces como:

st:

$$x^2 + y^2 \leq a^2 \quad (1)$$

Entonces la norma  $\|z\|$  para este conjunto seria:

$$\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (5.3)$$

### 5.2.2 CUADRADO

El modo de establecer una norma que describa un cuadrado comienza estableciendo como radio  $r$  a la distancia más próxima del centro  $r$  a uno de sus lados  $l$ , el radio en este caso  $r$  es definido como  $r = l/2$ , entonces el conjunto que describe un cuadrado resulta en  $\|z\| \leq a$  donde  $a = r$  y  $a = 1$  el modelo resultante seria entonces:

st:

$$|x| \leq a \quad (1)$$

$$|y| \leq a: \quad (2)$$

Entonces la norma  $\|z\|$  para este conjunto seria:

$$\|z\| = \max\{|x|, |y|\} \quad (5.4)$$

### 5.2.3 ROMBO

El modo de establecer una norma que defina un rombo comienza estableciendo como radio  $r$  a la distancia del punto central a uno de los vértices del rombo, esta distancia  $r$  puede ser calculada como  $r = l/\sqrt{2}$  si solo se tiene la longitud  $l$  de los

lados del rombo, entonces el conjunto que define a un rombo seria  $\|z\| \leq a$  donde  $a = r$  y  $a = 1$  el modelo resultante queda como:

st:

$$|x| + |y| \leq a \quad (1)$$

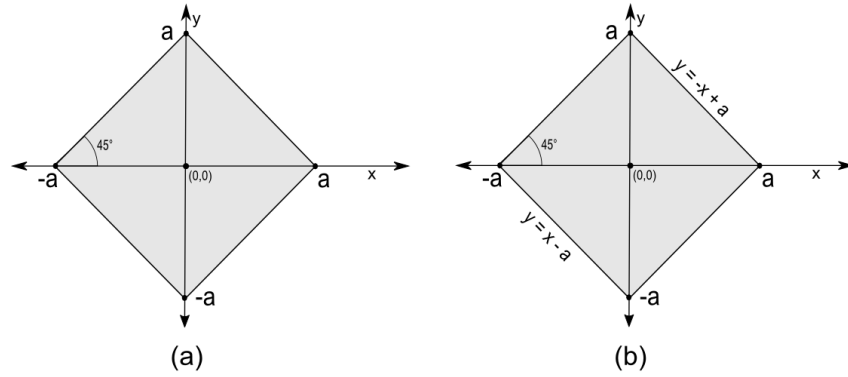


Figura 5.2: (a) Rombo-características, (b) Rombo-ecuación de inclinación.

Entonces la norma  $\|z\|$  para este conjunto seria:

$$\|z\| = |x| + |y| \quad (5.5)$$

### 5.2.4 OCTÁGONO

El modo de establecer una norma que defina un octágono es semejante al del hexágono, pero dependiendo de su orientación con respecto a los ejes la norma puede ser definida de modo distinto, si se establece la norma suponiendo que dos de sus lados están paralelos a los ejes debe establecerse el radio  $r$  igual al apotema del octágono, el conjunto que describe a un octágono seria  $\|z\| \leq a$  donde  $a = r$  y  $a = 1$ , este conjunto queda definido como:

st:

$$|x| \leq a \quad (1)$$

$$|y| \leq a \quad (2)$$

$$|x| + |y| \leq \sqrt{2}a: \quad (3)$$

Entonces la norma  $\|z\|$  para este conjunto seria:

$$\|z\| = \max\{|x|, |y|, \frac{1}{\sqrt{2}}(|x| + |y|)\} \quad (5.6)$$

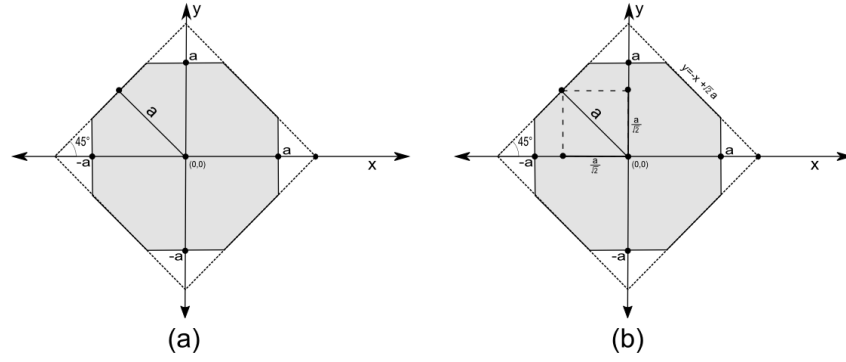


Figura 5.3: (a) Octágono-características, (b) Octágono-ecuación de inclinación.

## 5.3 NORMAS ASIMÉTRICAS

### 5.3.1 RECTÁNGULO

El rectángulo es un caso de asimetría, se parte definiendo al objeto con un solo radio  $r$ , el conjunto que define a un rectángulo  $\|z\| \leq a$  donde  $a = r$  y  $a = 1$  se establece entonces como:

st:

$$\alpha|x| \leq a \quad (1)$$

$$\beta|y| \leq a \quad (2)$$

En la fig. 5.4 se puede observar este caso de asimetría considerando al rectángulo como un cuadrado achatado en uno o en dos de sus ejes, entonces la norma  $\|z\|$  para este conjunto seria:

$$\|z\| = \max\{\alpha|x|, \beta|y|\} \quad (5.7)$$

Donde  $\alpha$  y  $\beta$  son los parámetros de deformación que definen al rectángulo, sus semiradios (o mitad de sus lados) pueden calcularse a partir de estos parámetros como en la elipse.



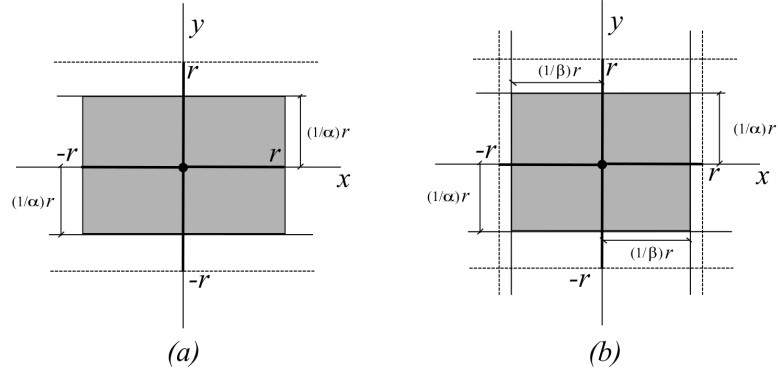


Figura 5.4: (Rectángulos) (a) asimetría en un solo eje, (b) asimetría en ambos ejes.

$$r_x = a/\alpha, r_y = a/\beta \quad (5.8)$$

### 5.3.2 ELIPSE

Este es un ejemplo clásico de asimetría, ya que se considera a la elipse como un círculo achatado en uno de sus ejes, se considera un solo radio  $r$ , el conjunto que define a la elipse  $\|z\| \leq a$  donde  $a = r$  y  $a = 1$  se establece entonces como:

st:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 \leq a^2 \quad (1)$$

En la fig. 5.5 puede observarse el caso de asimetría de la elipse, la norma  $\|z\|$

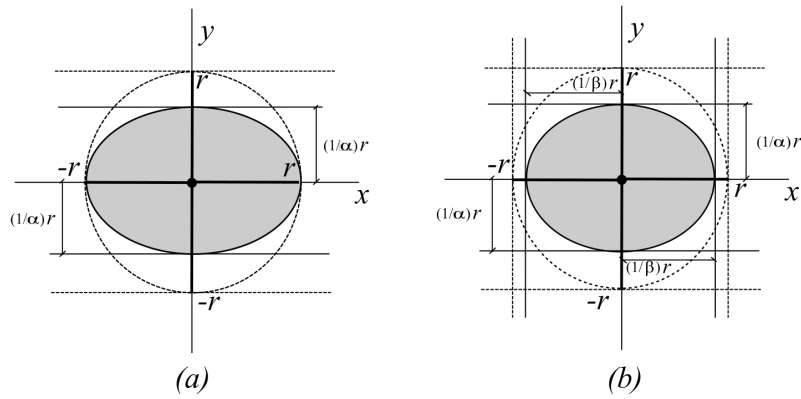


Figura 5.5: (Elipses) (a) asimetría en un solo eje, (b) asimetría en ambos ejes.

para este conjunto seria entonces:

$$\|z\| = \sqrt{\alpha x^2 + \beta y^2} \quad (5.9)$$

Los valores  $\alpha$  y  $\beta$  son los parámetros de deformación que definen a la elipse, los valores de los semiradios de la elipse pueden calcularse utilizando las siguientes formulas.

$$r_x = a/\alpha, r_y = a/\beta \quad (5.10)$$

### 5.3.3 HEXÁGONO

Aunque el hexágono puede ser regular, su norma es realmente asimétrica, El modo de obtener una norma para el caso del hexágono se puede explicar de manera semejante al del octágono, dependiendo de su orientación con respecto a los ejes la norma puede ser diferente, aquí se explicara el modo horizontal donde dos de sus lados son paralelos al eje  $x$ , en la fig. 5.6 puede verse lo anterior, para ambos sentidos horizontal y vertical.

En este caso (modo horizontal) debe establecerse como radio  $r$  del objeto la distancia del centro a uno de sus vértices, Entonces definimos las restricciones que definen al hexágono, el conjunto que define al hexágono  $\|z\| \leq a$  donde  $a = r$  se establece entonces como:

st:

$$|x| \leq a \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{\cos(30^\circ)}\right)|y| \leq a: \quad (2)$$

$$\tan(60^\circ)|x| + |y| \leq \tan(60^\circ)a: \quad (3)$$

Entonces la norma  $\|z\|$  para este conjunto seria:

$$\|z\| = \max\left\{|x|, \frac{1}{\cos(30^\circ)}|y|, |x| + \left(\frac{1}{\tan(60^\circ)}\right)|y|\right\} \quad (5.11)$$

Para el modo vertical y siguiendo un razonamiento similar se puede obtener:

$$\|z\| = \max\left\{\frac{1}{\cos(30^\circ)}|x|, |y|, \left(\frac{1}{\tan(60^\circ)}\right)|x| + |y|\right\} \quad (5.12)$$

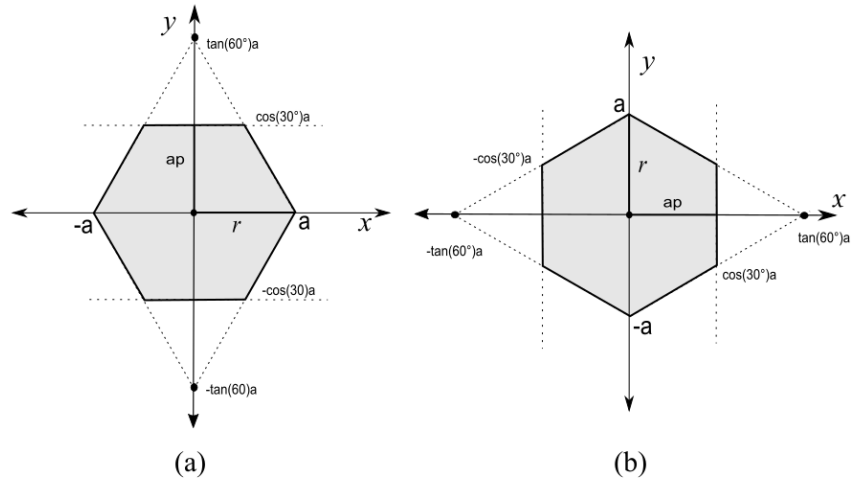


Figura 5.6: (Hexágono) (a) asimetría horizontal (b) asimetría vertical.

### 5.3.4 CONSIDERACIONES SOBRE LAS NORMAS ASIMÉTRICAS

Las normas asimétricas nos permiten acomodar objetos que no son completamente regulares, sin embargo las normas asimétricas son insuficientes para detectar la intersección de dos objetos asimétricos si estos tienen diferente orientación o ángulo de rotación, todos los objetos empacados mediante una norma asimétrica deben ser semejantes (de la misma forma pero diferente escala) como en el caso de normas simétricas.

## 5.4 OTRAS NORMAS

### 5.4.1 CÍRCULOS TRUNCO

Una norma puede definir figuras que tengan lados rectos y trazos curvos como es el caso de un círculo truncado (ver fig.5.7), se puede definir entonces un círculo trunco en el eje  $x$  con el siguiente modelo:

st:

$$(1/\alpha)|y| \leq r \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 \leq r^2 \quad (2)$$

Entonces la norma  $\|z\|$  para este conjunto seria:

$$\|z\| = \max\{(1/\alpha)|y|, \sqrt{x^2 + y^2}\} \quad (5.13)$$

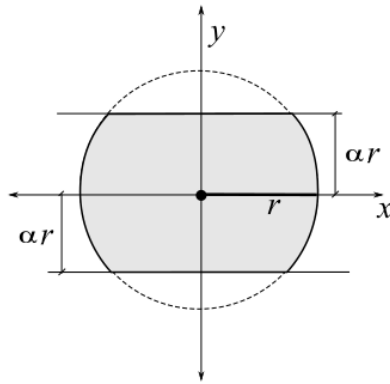


Figura 5.7: (A) Círculo trunco

#### 5.4.2 TRES DIMENSIONES

Objetos en tres dimensiones pueden también definirse mediante normas, en estos agrega entonces la coordenada  $z$  en el calculo de las normas, por ejemplo las normas para una esfera y un cubo serian:

$$\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (esfera) \quad (5.14)$$

$$\|z\| = \max\{|x|, |y|, |z|\} \quad (cubo)$$

## CAPÍTULO 6

# OBJETOS IRREGULARES

---

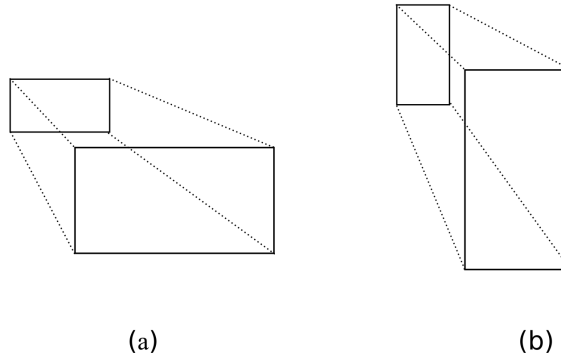
En esta sección se describe cómo manejar objetos irregulares en los que no se define una norma y se tiene que utilizar otros métodos para detectar la sobreposición de objetos, estos métodos puede implicar el uso de combinación de normas, el uso de trigonometría e incluso métodos que implican un modelo de optimización.

## 6.1 OBJETO RECTANGULAR

### 6.1.1 INTERSECCIÓN SIN TELESCOPIA

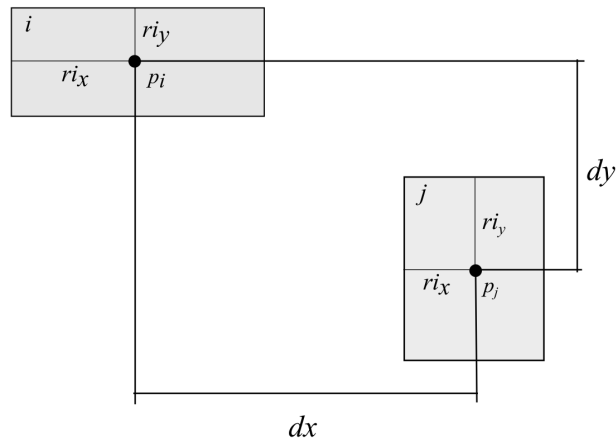
En los anteriores capítulos la intersección se definía mediante el uso de la norma vectorial, pero para objetos de mayor complejidad, calcular una norma no es posible, incluso un objeto tan sencillo como un rectángulo no podría saberse si se intersecta con otro solo con la norma, aunque existe una norma para objetos rectangulares esta norma solo puede aplicarse a los objetos que sean semejantes entre sí, para ilustrar el caso de semejanza podemos definir que un rectángulo es semejante a otro cuando sus lados son proporcionales a los del otro (ver fig 6.1), sin embargo aún podemos hacer uso del concepto de norma para determinar si existe o no intersección.

Figura 6.1: Rectángulos semejantes



Se tienen dos rectángulos  $i$  y  $j$ , con centro en  $p_i$  y  $p_j$  respectivamente, (fig.6.2) y se tiene para definir las dimensiones de los rectángulos sus radios en  $x$  y en  $y$ , llamados  $ri_x$  y  $ri_y$  para el rectángulo  $i$  y  $rj_x$  y  $rj_y$  para el rectángulo  $j$ . Para encontrar si existe intersección se usa el concepto de norma de un cuadrado, se considera que el rectángulo tiene dos normas que definidas como la primera como distancia  $dx$  en el eje  $x$  entre los centros de estos rectángulos y la segunda como distancia  $dy$  en el eje  $y$  también de los centros de los rectángulos, cualquiera que se cumpla es suficiente para la no intersección.

Figura 6.2: Rectángulos intersección



La condición de no intersección deberá encontrarse si:

$$dx \geq ri_y + rj_y \text{ y } dy \geq ri_x + rj_x$$

donde

$$dx = |x_i - x_j|, dy = |y_i - y_j|$$

(6.1)

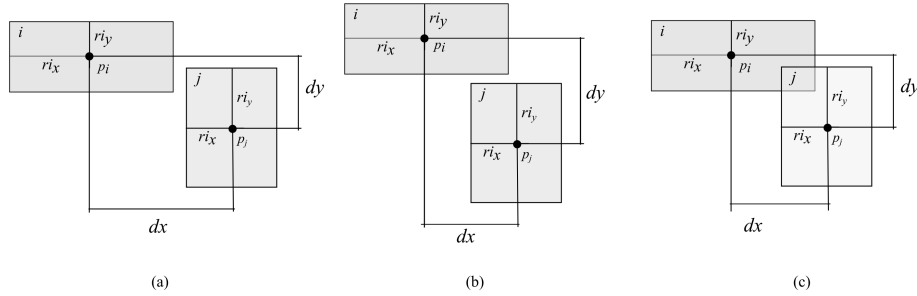
La figura 6.3 ilustra el uso de las normas para detectar la intersección, en (a) se muestra el caso de no intersección cuando  $dx > ri_y + rj_y$ , en (b) cuando  $dy > ri_x + rj_x$  y en (c) se muestra el caso de intersección, hay que observar que para que haya intersección las dos normas tienen que ser incumplidas, entonces el conjunto  $N_{ik}$  queda definido como.

$$N_{ik} = \{j, l : i \neq j, dx < ri_x + rj_x \text{ y } dy < ri_y + rj_y\}$$

donde :  $dx = |x_i - x_j|, dy = |y_i - y_j|$

(6.2)

Figura 6.3: Rectángulos intersección



### 6.1.2 INTERSECCIÓN CON TELESCOPIA

El caso de telescopía es más complejo, porque se tiene que verificar que los objetos solo tengan una parte de ellos sobrepuesta, en los casos anteriores bastaba con saber si se solapaban, en el caso de telescopía se tiene que saber si es un objeto está dentro de otro, en este caso se decidió por un enfoque analítico, para el caso de intersección se puede definir un modelo matemático que define dos rectángulos mediante restricciones, suponemos dos rectángulos  $i$  y  $j$ , con centros en  $p_i$  con

coordenadas( $pi_x$  ,  $pi_y$ ) y  $p_j$  con coordenadas( $pj_x$  ,  $pj_y$ ) respectivamente, con radios  $ri_x$  y  $ri_y$  para rectángulo  $i$  y  $rj_x$  ,  $rj_y$  para rectángulo  $j$ .

Establecemos que el rectángulo  $i$  puede ser contenido dentro de  $j$ , entonces suponiendo un punto dentro de  $i$  con coordenadas en  $x$  y en  $y$  este mismo punto debe estar contenido en el rectángulo  $j$ , de no existir este punto se considera entonces que el rectángulo puede estar fuera del rectángulo o intersectado de forma parcial , este solapamiento parcial puede verificarse como se menciona en el punto anterior, y en caso de existir solapamiento entonces se considera que los rectángulos están intersectados para el caso de telescopía, este modelo se presenta como sigue:

$$pi_x - ri_x \leq x \leq pi_x + ri_x \quad (1)$$

$$pi_y - ri_y \leq y \leq pi_y + ri_y \quad (2)$$

$$pj_x - rj_x \leq x \leq pj_x + rj_x \quad (3)$$

$$pj_y - rj_y \leq y \leq pj_y + rj_y \quad (4) \tag{6.3}$$

$$ri_x \leq rj_x \quad (5)$$

$$ri_y \leq rj_y \quad (6)$$

$$ri_x * ri_y < rj_x * rj_y \quad (7)$$

En el modelo 6.3 , las restricciones (1) y (2) aseguran que el punto con coordenadas  $(x,y)$  este dentro del rectángulo  $i$ , (3) y (4) aseguran que también este dentro de rectángulo  $j$  , las restricciones (5),(6) y (7) aseguran que el rectángulo  $i$  pueda ser contenido dentro del rectángulo  $j$ , si todos los puntos existentes dentro de  $i$  están contenidos en  $j$  entonces el rectángulo  $i$  esta dentro de  $j$ , sustituyendo en restricciones (3) y (4) el rango de valores posibles de  $x$  y  $y$  ,nos queda finalmente las condiciones posibles para saber si existe telescopía.

$$pj_x - pi_x \leq rj_x - ri_x \quad (1)$$

$$pi_x - pj_x \leq rj_x - ri_x; \quad (2) \tag{6.4}$$

$$pj_y - pi_y \leq rj_y - ri_y \quad (3)$$

$$pi_y - pj_y \leq rj_y - ri_y; \quad (4)$$

Si se desea simplificar aun mas estas condiciones, podría utilizarse el valor absoluto quedando el problema finalmente como una combinación de normas de un



cuadrado.

$$|pj_x - pi_x| \leq rj_x - ri_x \quad (1)$$

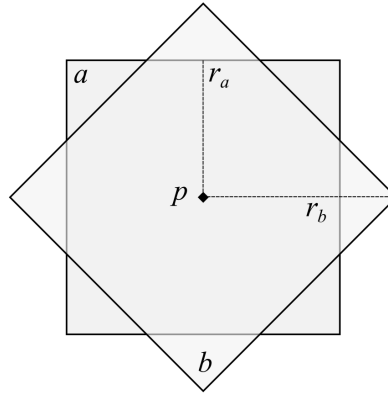
$$|pi_x - pj_x| \leq rj_x - ri_x; \quad (2)$$

(6.5)

## 6.2 OBJETO ESTRELLA

El objeto estrella es un objeto que se puede considerar como compuesto, por un cuadrado y un rombo, la forma de abordar un objeto de este tipo puede ser considerando esta composición de objetos, la forma de conocer si existe o no intersección entre dos objetos de este tipo, puede tratarse analíticamente como una combinación de normas entre un rombo  $a$  y un cuadrado  $b$  (fig. 6.4), ambos con centro en  $p$  y radios  $r_a$  y  $r_b$ .

Figura 6.4: Objeto Estrella



### 6.2.1 INTERSECCIÓN SIN TELESCOPIA

Se puede definir a los objetos que componen el objeto estrella mediante una función con restricciones, para el objeto cuadrado tenemos que:

$$Q(r) = \{(x, y) : \max\{|x|, |y|\} \leq r\}$$

Y para el rombo se tiene:

$$R(r) = \{(x, y) : \alpha(|x| + |y|) \leq r\}$$

Donde  $\alpha$  es un coeficiente que define el tamaño del rombo y  $\alpha = 1$  si  $\alpha = 1$  el rombo envuelve al cuadrado y no es un objeto estrella, donde  $r$  es el radio del cuadrado y el radio del rombo se calcula como  $(a/\alpha)$ . Para que un punto este dentro del objeto estrella debería poder satisfacer al menos una de estas funciones, por lo que un objeto estrella puede ser definido como todos los puntos donde se cumpla:

$$S(a) = \{(x, y) \in Q(r) \text{ or } R(r)\}$$

Usando una variable binaria  $z$ , la función anterior puede ser expresada con el siguiente modelo matemático:

$$S(r) = \left\{ \begin{array}{l} |x| + z((\alpha - 1)|x| + \alpha|y| \leq r) \\ |y| + z(\alpha|x| - (1 - \alpha)|y| \leq r) \end{array}, z \in 0, 1 \right\}$$

El valor de  $z$  indica la localización del punto  $(x, y)$ , si  $z = 0$  el punto se ubica en el cuadrado, si  $z = 1$  indica que esta en el rombo. Partiendo de esta definición del objeto estrella podemos establecer las condiciones en que puede darse la intersección entre dos objetos de este tipo  $(S_i, S_j)$  con centros en  $(x_i, y_i)$  y  $(x_j, y_j)$  representados como:

$$S_i(r_i) = \left\{ (x, y, z_i), \begin{array}{l} |x - x_i| + z_i((\alpha - 1)|x - x_i| + \alpha|y - y_i| \leq r_i) \\ |y - y_i| + z_i(\alpha|x - x_i| - (1 - \alpha)|y - y_i| \leq r_i) \end{array}, z_i \in \{0, 1\} \right\}$$

$$S_j(r_j) = \left\{ (x, y, z_j), \begin{array}{l} |x - x_j| + z_j((\alpha - 1)|x - x_j| + \alpha|y - y_j| \leq r_j) \\ |y - y_j| + z_j(\alpha|x - x_j| - (1 - \alpha)|y - y_j| \leq r_j) \end{array}, z_j \in \{0, 1\} \right\}$$

Para determinar si existe o no intersección, debemos encontrar un punto con coordenadas  $(x, y)$  que pueda satisfacer ambos modelos, encontrar este punto equivale a encontrar un punto de intersección ya que el punto estaría en ambos objetos, podemos establecer la intersección  $S_i \cap S_j \neq \emptyset$  si  $(x, y) \in S_i$  y  $(x, y) \in S_j$ . Para determinar si existe este punto  $p$  debemos hacer varias suposiciones sobre las variables binarias que se explican a continuación.

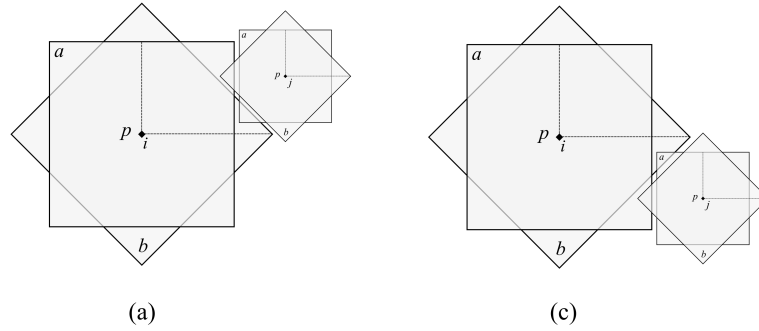
(1) Si  $z_i = 0, z_j = 0$ , esto equivale a suponer que ambos objetos son cuadrados, y podemos usar la norma de objetos cuadrados ( $\|z\| = \max\{|x|, |y|\}$ ) para determi-

nar si existe intersección.

(2) Si  $z_i = 0, z_j = 1$ , esto equivale a suponer que ambos objetos son rombos y podemos usar la norma de objetos rombos con un radio modificado por el parámetro  $\alpha$  ( $\|z\| = \alpha(|x| + |y|)$ ) para determinar si existe intersección.

Para los casos 1 y 2 basta con determinar la norma y comparar con la sumatoria de radios de los objetos ( $r_i$  y  $r_j$ ) como ya se ha explicado pero si las variables binarias  $z_i$  y  $z_j$  son diferentes entonces el calculo se vuelve mas complejo ya que se supone detectar la intersección de un rombo y un cuadrado (ver fig.6.5).

Figura 6.5: Intersección rombo-cuadrado en objetos estrella



(3) Si  $z_i = 1, z_j = 0$ , esto equivale a suponer que el objeto  $i$  es un rombo y el objeto  $j$  es cuadrado, la intersección entre el rombo y el cuadrado queda establecida cuando se cumple:

$$\alpha(|x - x_i| + |y - y_i|) \leq r_i \quad (1)$$

$$|x - x_j| \leq r_j \quad (2) \quad (6.6)$$

$$|y - y_j| \leq r_j \quad (3)$$

Donde (1) es la restricción es la que define un rombo en  $i$  y las restantes (2) y (3) son las que definen el cuadrado en  $j$ , podemos convertir este problema en un problema de optimización donde  $x$  y  $y$  son variables continuas del problema y (1) pasa a ser

la función objetivo  $f$  del problema y el optimo  $f^*$ .

$$\begin{aligned}
 f^* &= \min(\alpha(|x - x_i| + |y - y_i|)) & (1) \\
 |x - x_j| &\leq r_j & (2) \\
 |y - y_j| &\leq r_j & (3) \\
 f^* &\leq a_i & (4)
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Este modelo puede descomponerse a su vez en dos subproblemas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 f_1^* &= \min(\alpha(|x - x_i| : |x - x_j| \leq a_j) \\
 f_2^* &= \min(\alpha(|y - y_i| : |y - y_j| \leq a_j)
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Entonces podemos revisar todo el rango posible de valores  $(x, y)$  que puede tener el cuadrado en punto  $i$  para revisar si existe una intersección con el rombo en  $j$ , esto se hace revisando los valores extremos que pueden tomar  $(x, y)$  en el cuadrado en  $i$ , estos valores extremos son:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & x_j - a_j \leq x \leq x_j + r_j \\
 (2) \quad & y_j - a_j \leq y \leq y_j + r_j \\
 (3) \quad & x = x_i \\
 (4) \quad & y = y_j
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

El rango en (1) y (2) corresponde al del cuadrado en  $j$ , (3) y (4) corresponde a un punto extremo en  $(x, y)$  donde  $f_1$  y  $f_2$  son iguales a cero, por lo que podemos deducir que los valores extremos de nuestras funciones objetivos  $f_1$  y  $f_2$  quedarían como:

$$\begin{aligned}
 f_1^* &= \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ Si } |x_i - x_j| \leq r_j \\ \alpha * \min\{|x_j + r_j - x_i|, |x_j - r_j - x_i|\} \end{array} \right\} \\
 f_2^* &= \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ Si } |y_i - y_j| \leq r_j \\ \alpha * \min\{|y_j + r_j - y_i|, |y_j - r_j - y_i|\} \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

El sistema es consistente si  $f_1^* + f_2^* \leq r_i$

(4) Si  $z_i = 0, z_j = 1$ , esto equivale a suponer que el objeto  $i$  es un cuadrado y el objeto  $j$  es un rombo, este caso es igual al caso anterior, solo que los objetos están invertidos, utilizando el método anterior podemos llegar a:

$$\begin{aligned} f_1^* &= \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ Si } |x_i - x_j| \leq r_i \\ \alpha * \min\{|x_i + a_i - x_j|, |x_i - r_i - x_j|\} \end{array} \right\} \\ f_2^* &= \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ Si } |y_i - y_j| \leq r_i \\ \alpha * \min\{|y_i + a_i - y_j|, |y_i - r_i - y_j|\} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

El sistema es consistente si  $f_1^* + f_2^* \leq r_j$ .

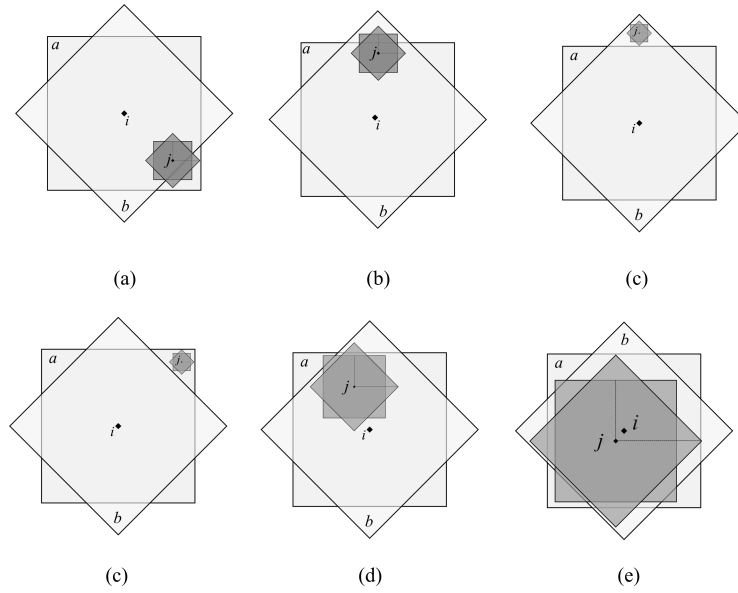
Calculando estos valores para el caso (3) y (4), y si estos cumplen la condición  $f_1^* + f_2^* \leq a_i$  podemos concluir que el par de objetos esta intersectados.

### 6.2.2 INTERSECCIÓN CON TELESCOPIA

En la intersección con telescopía se puede tomar un enfoque geométrico, de esta forma pueden encontrarse fácilmente casos de telescopía usando las normas de cada objeto, si el cuadrado de un objeto en  $i$ , está dentro del cuadrado del otro objeto en  $j$ , y si el rombo en  $i$ , también está dentro del rombo del otro objeto en  $j$ , otros casos son posibles, puede haber telescopía sin necesidad de que el rombo en  $i$  este dentro del rombo en  $j$ .

En la figura 6.6, se muestran los casos de telescopía existentes, en el caso (a) y (c) el objeto estrella  $j$  es contenido solo por el cuadrado de la estrella  $i$ , en el caso (b) y (d), la estrella  $j$  es contenida en el rombo de la estrella  $i$  más grande, los casos (c) y (e) basta con la comparación de normas de cada objeto para establecer si una estrella esta dentro de otra, en todos los casos de objetos estrellas, puede decirse, que los dos objetos que forman la estrella  $j$  deben estar al menos en uno de los dos objetos, que forman la estrella  $i$ . En resumen para el caso de estrellas, la condición

Figura 6.6: Rectángulos semejantes



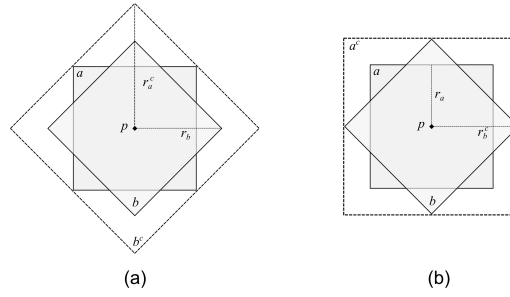
de telescopía podríamos expresarla de la siguiente forma simple:

$$S_i \in S_j \text{ si } a_i \in (a_j \text{ o } b_j) \text{ y } b_i \in (a_j \text{ o } b_j) \quad (6.10)$$

Donde el objeto estrella  $S_i$  pertenece o está dentro de  $S_j$  si los objetos  $a$  y  $b$  que lo componen están o pertenecen al menos a uno de los objetos  $a$  o  $b$  del objeto  $S_j$ . Para esta determinación de si  $a$  y  $b$  del objeto  $i$  están dentro de  $a$  o  $b$  del objeto en  $j$ , puede servirnos la definición de rombo exterior  $b^c$  y cuadrado exterior  $a^c$  (fig. 6.7), usando solamente las normas de estos objetos complementarios, puede hacerse que los objetos a comparar sean semejantes y por lo tanto comparables usando sus normas correspondientes (rombo con rombo y cuadrado con cuadrado).

Entonces las condiciones para que exista el caso de telescopía con estas nuevas

Figura 6.7: Definiciones:cuadrado y rombo exterior



definiciones quedan establecidas en tres casos que podemos expresar como:

$$S_i \in S_j \text{ si : } \left\{ \begin{array}{l} (a_i \in a_j) \text{ y } (b_i \in b_j) \text{ o} \\ (a_i \in a_j) \text{ y } (a_i^c \in a_j) \text{ o} \\ (b_i \in b_j) \text{ y } (b_i^c \in b_j) \end{array} \right\} \quad (6.11)$$

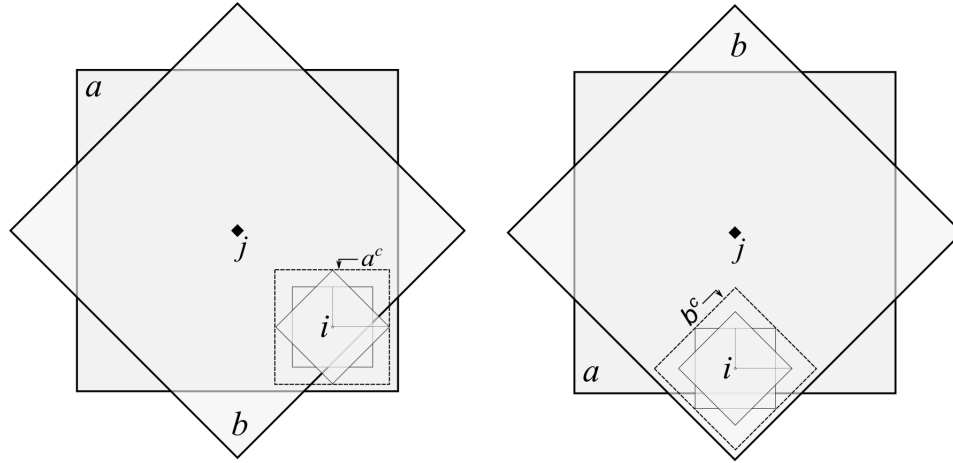
La fig. 6.8 muestra como se utilizan los rombos y cuadrados exteriores para definir si existe o no la telescopía, para el caso (a) el objeto estrella  $i$  es envuelto en un cuadrado exterior  $a^c$  para demostrar que los dos objetos pertenecientes a  $i$  están dentro del cuadrado en  $j$  y que por lo tanto el objeto  $i$  esta dentro del objeto  $j$ , en el caso (b) se envuelve el objeto estrella  $i$  en un rombo exterior  $b^c$  para demostrar que los dos objetos en  $i$  están dentro del rombo perteneciente al objeto  $j$  y que por lo tanto el objeto  $i$  esta dentro del objeto  $j$ .

Por ultimo para definir si no existe telescopía debe aun revisarse si los objetos tienen una intersección parcial, pudiendo utilizarse las consideraciones establecidas para el caso sin telescopía, y si no hay telescopía pero hay intersección entonces deberá incluirse esta pareja de objetos  $i$  y  $j$  en el conjunto  $\omega_{ik}$ , definido para el caso de telescopía.

### 6.3 OBJETO L

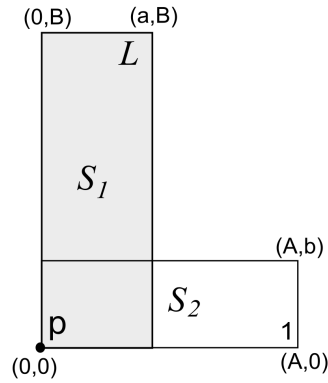
Un objeto L es un objeto compuesto, formado por la superposición de dos rectángulos de diferente dimensión, el rectángulo  $S_1$  con las dimensiones  $(a \cdot B)$  y

Figura 6.8: Utilización de rombos y cuadrados exteriores



el rectángulo  $S_2$  con las dimensiones  $(A \cdot b)$  (ver fig. ??), el punto pivote  $p$  de este objeto compuesto se encuentra en el vértice la esquina inferior izquierda.

Figura 6.9: Utilización de rombos y cuadrados exteriores



### 6.3.1 INTERSECCIÓN SIN TELESCOPIA

Podemos definir un objeto  $L$ , mediante restricciones, entonces podemos representar dos objetos  $L$ , como  $L_i$  compuesto por  $S_{i1} \cup S_{i2}$  y  $L_j$  compuesto por  $S_{j1} \cup S_{j2}$  de la forma siguiente:



$$L_i = \left\{ (x, y, z_i) : z_i \in \{0, 1\}, \begin{array}{l} 0 \leq x - x_i \leq A_i + z_i(a_i - A_i), \\ 0 \leq y - y_i \leq b_i + z_i(B_i - b_i) \end{array} \right\}$$

Donde  $A_i > a_i > 0, B_i > b_i > 0$  y

$$L_j = \left\{ (x, y, z_j) : z_j \in \{0, 1\}, \begin{array}{l} 0 \leq x - x_j \leq A_j + z_j(a_j - A_j), \\ 0 \leq y - y_j \leq b_j + z_j(B_j - b_j) \end{array} \right\}$$

Donde  $A_j > a_j > 0, B_j > b_j > 0$

Entonces para conocer si  $L_i \cap L_j \neq \emptyset$  se debe satisfacer el siguiente sistema de desigualdades, se tiene que.

$$\begin{aligned} \max \{x_i, x_j\} &\leq x \leq \min \{x_i + A_i + z_i(a_i - A_i), x_j + A_j + z_j(a_j - A_j)\} \\ \max \{y_i, y_j\} &\leq y \leq \min \{y_i + b_i + z_i(B_i - b_i), y_j + b_j + z_j(B_j - b_j)\} \end{aligned}$$

En este modelo  $z_i$  y  $z_j$  son variables binarias que indican en que rectángulo de los dos que componen el objeto L, está el punto con coordenada  $(x, y)$  para que este pueda pertenecer al objeto L, entonces las condiciones establecidas pueden definir si existe al menos un punto que pueda pertenecer a ambos objetos L y aunque no conocemos los valores de las variables binarias  $z_i$  y  $z_j$ , solo pueden existir cuatro combinaciones de estas que pueden ser verificadas.

Para  $z_i = z_j = 0$ , este caso es equivalente a suponer que el rectángulo  $S_2$  de  $L_i$  intersecta con  $S_2$  de  $L_j$ .

$$\begin{aligned} \max \{x_i, x_j\} &\leq x \leq \min \{x_i + A_i, x_j + A_j\} \text{ and} \\ \max \{y_i, y_j\} &\leq y \leq \min \{y_i + b_i, y_j + b_j\} \end{aligned}$$

Para  $z_i = z_j = 1$ , este caso es equivalente a suponer que el rectángulo  $S_1$  de  $L_i$  intersecta con el rectángulo  $S_1$  de  $L_j$ .

$$\begin{aligned} \max \{x_i, x_j\} &\leq x \leq \min \{x_i + a_i, x_j + a_j\} \text{ and} \\ \max \{y_i, y_j\} &\leq y \leq \min \{y_i + B_i, y_j + B_j\} \end{aligned}$$

Para  $z_i = 1, z_j = 0$ , este caso es equivalente a suponer que el rectángulo  $S_1$  de  $L_i$  intersecta con el rectángulo  $S_2$  de  $L_j$ .

$$\begin{aligned} \max \{x_i, x_j\} &\leq x \leq \min \{x_i + a_i, x_j + A_j\} \text{ and} \\ \max \{y_i, y_j\} &\leq y \leq \min \{y_i + B_i, y_j + b_j\} \end{aligned}$$

Para  $z_i = 0, z_j = 1$ , este caso es equivalente a suponer que el rectángulo  $S_2$  de  $L_i$

intersecta con el rectángulo  $S_1$  de  $L_j$ .

$$\max \{x_i, x_j\} \leq x \leq \min \{x_i + A_i, x_j + a_j\} \text{ and}$$

$$\max \{y_i, y_j\} \leq y \leq \min \{y_i + b_i, y_j + B_j\}$$

Si en cualquiera de estas condiciones existe un valor  $x$  y  $y$  que en los rangos establecidos, entonces existe intersección entre los objetos  $L$  ( $L_i \cap L_j \neq \emptyset$ )

Otra forma de verificar la intersección puede establecerse estableciendo los rectángulos que forman  $L_i$  y  $L_j$  y determinando si entre cada pareja de rectángulos existe o no intersección :

$$\begin{aligned} L_i &= S_{i1} \cup S_{i2} \\ L_j &= S_{j1} \cup S_{j2} \\ L_i \cap L_j &= \emptyset \\ S_i : \end{aligned} \tag{6.12}$$

$$S_{i1} \cap S_{j1} = \emptyset \text{ y } S_{i1} \cap S_{j2} = \emptyset \text{ y } S_{i2} \cap S_{j1} = \emptyset \text{ y } S_{i2} \cap S_{j2} = \emptyset$$

El problema se simplifica a usar las normas de un cuadrado como se explica para el caso de objetos rectangulares, para cada caso de posible intersección, para que haya intersección basta con que un caso se cumpla, bajo esta idea pueden también encontrarse intersecciones para objetos L con distinta orientación (como en la experimentación de objetos L del capítulo 11)..

### 6.3.2 INTERSECCIÓN CON TELESCOPÍA

El enfoque anterior es suficiente para detectar intersección parcial pero para detectar telescopía se vuelve más complejo, pero podemos usar un método mas simple, descomponiendo el objeto L en dos objetos conocidos y que sabemos cómo detectar su intersección en caso de telescopía.

Para determinar la telescopía, tenemos un objeto  $L_1$  y un objeto  $L_2$  que se ha detectado su solapamiento, posteriormente se determina cual de los objetos debería contener al otro (en caso que sean iguales se descartaría la telescopía), el objeto  $L_1$  esta formado por los objetos  $S_{11}$  y  $S_{12}$  y el objeto  $L_2$  esta formado por los objetos  $S_{21}$  y  $S_{22}$ . Tenemos que:

$$L_1 = S_{11} \cup S_{12} \text{ y } L_2 = S_{21} \cup S_{22} \tag{6.13}$$

Para telescopía se tiene dos posibles casos que son:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & Si \text{ Area}(L_1) < \text{Area}(L_2) \\
 & L_1 \in L_2 Si : S_11 \in (S_21 \text{ o } S_22) \text{ y } S_12 \in (S_21 \text{ o } S_22) \\
 (2) \quad & Si \text{ Area}(L_2) < \text{Area}(L_1) \\
 & L_2 \in L_1 Si : S_21 \in (S_11 \text{ o } S_12) \text{ y } S_22 \in (S_11 \text{ o } S_12)
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Esto es semejante a lo explicado para el caso de los objetos estrella donde se determina que los objetos que componen el objeto  $L$  deben estar dentro de al menos uno de los objetos que componen al otro objeto  $L$ , pero en este caso se comparan solamente rectángulos y podemos usar lo explicado para el caso de telescopía en rectángulos.

## 6.4 EMPAQUETAMIENTO DE OBJETOS DIFERENTES

En esta investigación mayormente se ha ocupado en el empaquetamiento de dos objetos semejantes (Circulo-Circulo) pero se pueden empaquetar objetos de diferente clase en un mismo contenedor, cuadrados, círculos y rombos pueden estar en un mismo contenedor, pero hay que determinar como interaccionan entre ellos, el empaquetamiento de objetos distintos implica tener métodos para cada una de las posibles combinaciones entre un par de objetos, para los tres objetos de ejemplo podemos obtener las siguientes combinaciones:

- Caso A1 : Circulo-Circulo
- Caso A2 : Circulo-Cuadrado
- Caso A3 : Circulo-Rombo
- Caso B1 : Cuadrado-Cuadrado
- Caso B2 : Cuadrado-Rombo
- Caso C1 : Rombo-Rombo

Para los casos de objetos semejantes (A1,B1,C1) se puede usar la norma como ya se ha hecho para saber si hay intersección, pero los casos A2,A3 y B2 debe determinarse si existe o no intersección con otro método, para el caso de A2 y A3 , que son los casos de un círculo con un rombo o un cuadrado, la fig. 6.10 y la fig. 6.11 ilustran estos casos, el primer paso (inciso (a)) es suponer al círculo como un cuadrado (caso A2) o un rombo (caso A3) y determinar con la norma si se tiene o no intersección ya que se tienen dos objetos semejantes, si esta prueba determina que hay intersección entonces deben obtenerse las distancias a cada uno de los vértices del cuadrado o rombo (inciso (b)), si un vértice al menos esta dentro del círculo se puede asegurar que existe intersección entre el par de objetos.

Figura 6.10: Intersección Círculo-Cuadrado

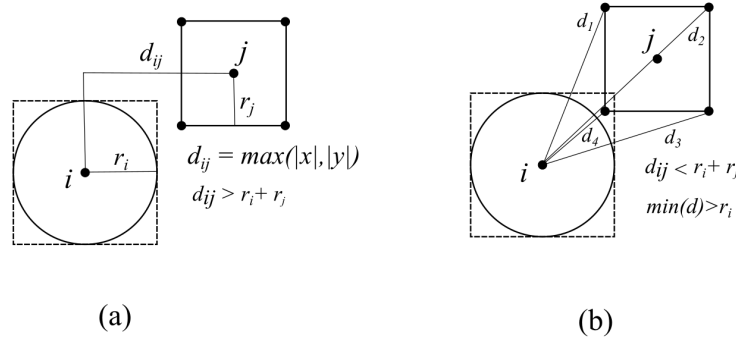
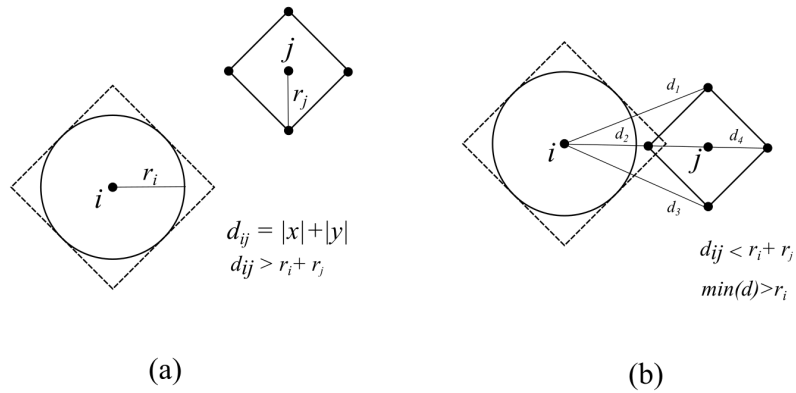
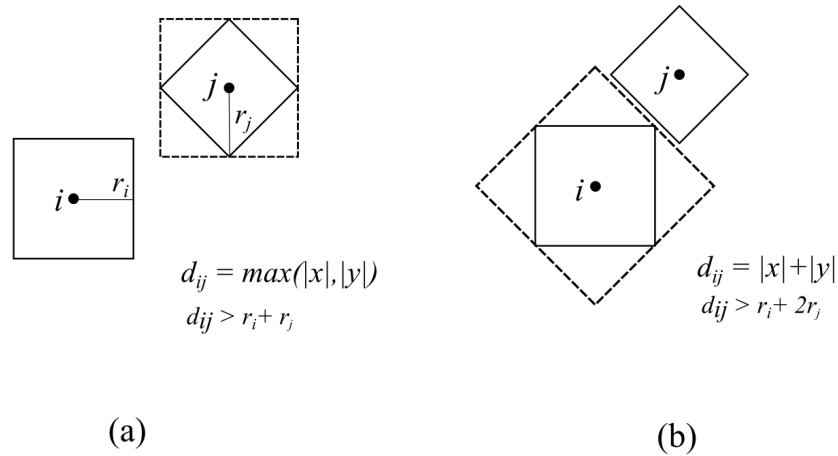


Figura 6.11: Intersección Círculo-Rombo



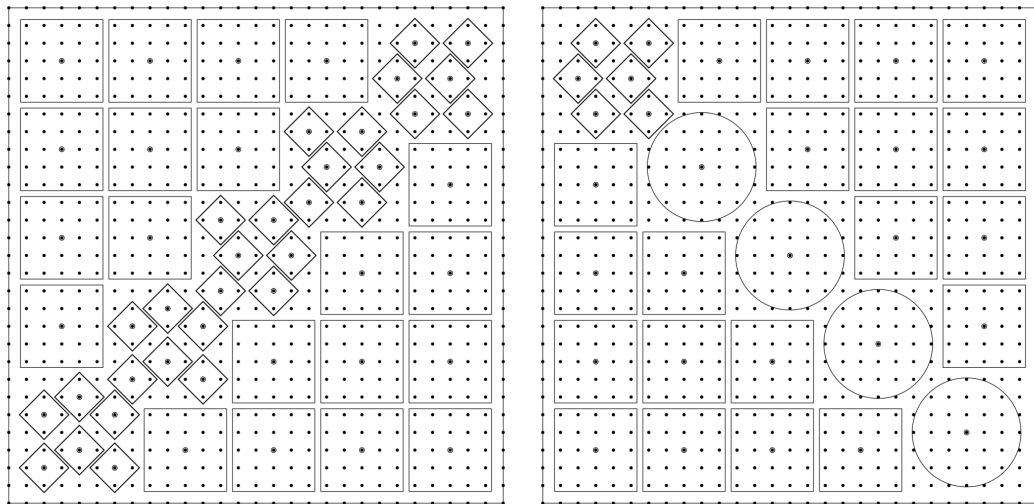
En el B2 se tiene un rombo y un cuadrado (ver fig. 6.12) y se puede usar una técnica semejante al rombo puede suponerse-le como un cuadrado (inciso (a)) y usar la norma para determinar si existe o no intersección, en caso de intersección se hace una segunda prueba (inciso (b)) pero en esta el cuadrado se envuelve dentro de un rombo, en caso de fallar nuevamente se puede asegurar que existe intersección, la fig. 6.13 muestra un ejemplo de estas instancias resueltas, consideraciones semejantes pueden hacerse para el caso de telescopía.

Figura 6.12: Intersección Cuadrado-Rombo



Otro método mas general y aplicable a polígonos convexos podría haber sido utilizar los vértices  $v_i$  del polígono  $V$  y los vértices  $w_j$  del polígono  $W$  y determinar si al menos uno de estos vértices pertenece a ambos objetos , si es así entonces se puede decir que  $V \cap W$  , este método implicaría probar todos los vértices de uno de los polígonos, la telescopía en este caso se daría cuanto todos los vértices de un objeto están dentro del otro (  $V \subset W$  o  $W \subset V$  ).

Figura 6.13: Ejemplos de empaquetamiento (Objetos diferentes)



## CAPÍTULO 7

# CONTENEDORES Y MALLAS

---

En este capitulo se explica como aplicar nuestro modelo a distintos tipos de contenedores y como generar mallas para discretizar estos.

### 7.1 CONTENEDOR RECTANGULAR

El contenedor rectangular es el mas en esta esta investigación , como se explica en el capitulo 4, el modelo discretiza a este contenedor envolviéndolo en una malla de nodos que puede ser rectangular, donde cada nodo de la malla significa una posible asignación de un objeto a ese punto, el nodo podría ser el centro de ese objeto o algún otro que se considere importante(pivote).

Una vez diseñada la malla se define el conjunto  $N_{ik}$  o  $\Omega_{ik}$  según sea el caso de empaquetamiento para luego construir el modelo matemático en el que las variables  $x_i^k$  estarían relacionadas a un nodo  $i$  de la malla.

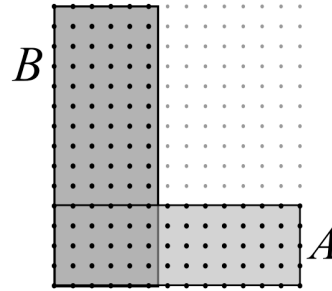
### 7.2 CONTENEDOR L

El contenedor L podemos definirlo como definimos al objeto L, empacar en objetos diferentes al contenedor rectangular no precisa cambiar el modo en que definimos la malla , como se hace en el contenedor rectangular en el los nodos forman una malla rectangular, en el contenedor L como en otros objetos podemos usar una malla generada de esta forma pero hay que eliminar los nodos que no formen parte



del objeto, en la fig. 7.1 se puede observar la malla rectangular sobrepuesta al objeto, los nodos en gris son los nodos que no serán tomados en cuenta.

Figura 7.1: Contenedor L (malla)



El método empleado para eliminar los nodos no pertenecientes a un objeto L es sencillo basta con conocer las coordenadas del punto  $x,y$  y las coordenadas de los vértices de los objetos rectangulares que componen la L para definir el dominio de este, entonces el punto debe estar dentro del dominio de al menos uno de estos rectángulos, para esto se deben cumplir las sigs. condiciones, :

$$\begin{aligned}
 xmin_A &\leq x \leq xmax_A \\
 ymin_A &\leq y \leq ymax_A \\
 xmin_B &\leq x \leq xmax_B \\
 ymin_B &\leq y \leq ymax_B
 \end{aligned}
 \tag{7.1}$$

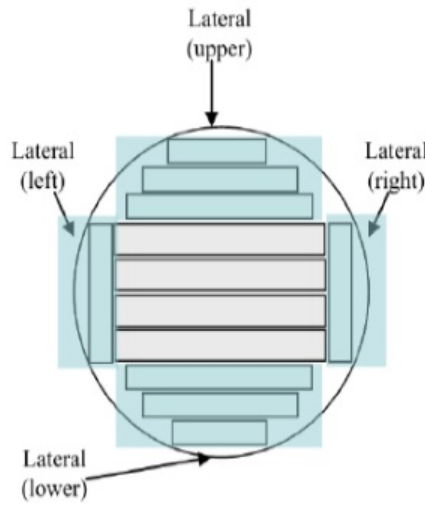
Estas restricciones revisan para cada rectángulo (A y B) que conforma la L si un punto con coordenadas  $(x,y)$  está dentro de alguno de ellos usando las coordenadas de los vértices extremos  $((xmin, ymin)$  y  $(xmax, ymax))$  de cada rectángulo. El siguiente paso para la utilización del contenedor L es conocer como afecta al objeto que vamos a empacar, para el objeto L podemos usar el principio geométrico que ya hemos usado en que el objeto debe estar al menos en un objeto que compone al contenedor L, en el capítulo 11 se muestra una experimentación con este contenedor.

### 7.3 CONTENEDOR CIRCULAR

Una aplicación que pueden tener los contenedores circulares es la del empaquetamiento de cables pero también se presenta en el corte longitudinal en tronco[46],[44], la fig. 7.2 .

Este contenedor podría hacer uso de la malla rectangular para definir cortes,al

Figura 7.2: Corte en troncos



momento de usar un contenedor de este tipo se deben eliminar los nodos que no pertenezcan a el (fig. ??), esto se hace para cualquier punto  $x,y$  revisando la siguiente restricción  $r$  que establece si un punto esta o no dentro de un contenedor circular ( $r$  define al círculo y  $xc$  y  $yc$  las coordenadas del centro del contenedor).

$$\sqrt{(x - xc)^2 + (y - yc)^2} \leq r \quad (7.2)$$

Para empacar objetos circulares dentro de un contenedor circular como condición de frontera debe revisarse una restricción semejante a la de telescopía de círculos, solo revisando la condición de si un objeto esta dentro de otro, esta restricción queda entonces como:

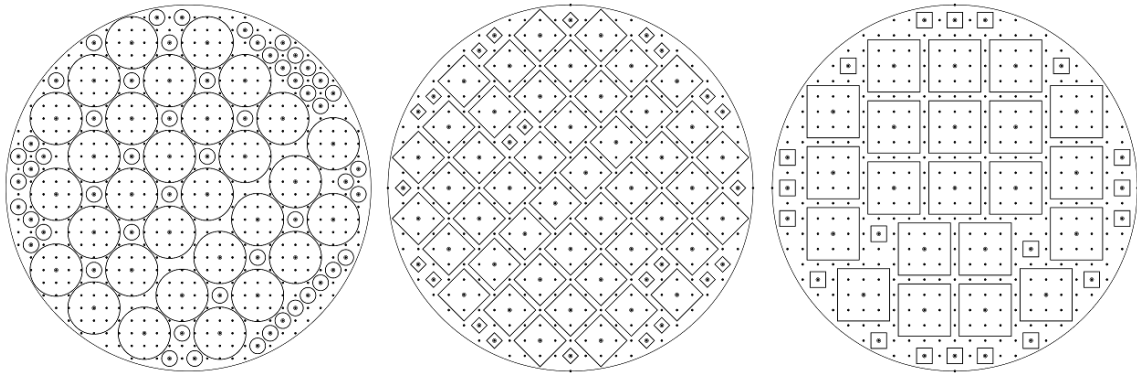
$$\sqrt{(x - xc)^2 + (y - yc)^2} \leq r - R_k \quad (7.3)$$

Para el empaquetamiento de rombos dentro de un contenedor circular este se comporta como si fuera un círculo para el contenedor, esto es igual para el cuadrado, sin embargo el radio  $R_k$  del cuadrado se redefine como:

$$R_k = \sqrt{2}R_k \quad (7.4)$$

Las figs.7.3 muestran el empaquetamiento en este tipo de contenedor.

Figura 7.3: Ejemplo - Contenedor Circular



## 7.4 CONTENEDOR POLIGONAL

Para usar este contenedor con la malla rectangular, al igual que en los dos contenedores debemos eliminar los nodos que no estén dentro, para esto usamos un algoritmo, el principio de este (fig 7.4 ) es que si tenemos un punto  $x$  ,  $y$  y trazamos una linea horizontal a la derecha de este y esta linea no toca o toca mas de una vez, podemos considera que el punto no esta dentro del polígono(si lo toca mas de una vez podría tratarse de un polígono no convexo) otros métodos mas sofisticados pueden encontrarse en el trabajo de Haines [25] (1994) en el cual explica este y otros métodos para detección de puntos interiores dando cuenta de las debilidades

y ventajas de usar alguno de estos.

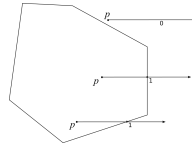


Figura 7.4: Revisión de punto interior en polígono

Ya teniendo diseñada la malla podemos empaquetar círculos en ella, basta con conocer la distancia del centro del círculo mas cercana a las rectas que componen el polígono (que seria la perpendicular del punto hacia los lados del polígono, ver fig. 7.5), entonces se obtiene cual es la mínima entre estas ( $d_{min}$ ) y se compara con el radio del círculo ( $R_k$ ), la distancia debe ser mayor o igual al radio ( $d_{min} \geq R_k$ ), en la fig. 7.6 se muestra un ejemplo de este empaquetamiento.

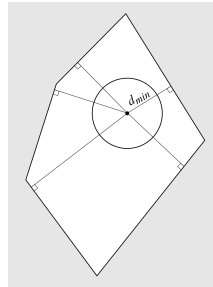


Figura 7.5: Ejemplo - contenedor poligonal

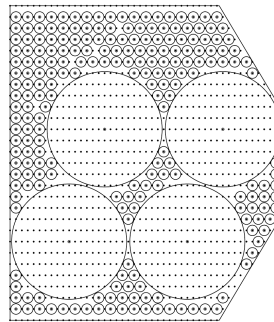


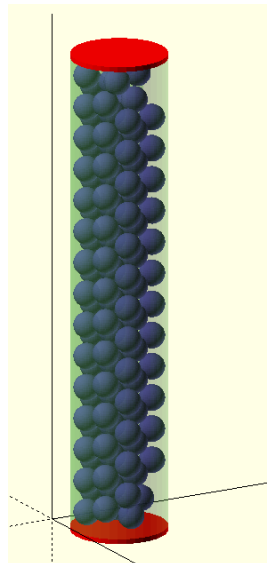
Figura 7.6: Ejemplo - contenedor poligonal

## 7.5 CONTENEDOR CILÍNDRICO

Empaquetar en un contenedor cilíndrico es muy semejante a empaquetar objetos dentro de un círculo, solo que en los nodos de la malla a generar debe considerarse la coordenada  $z$ , un contenedor cilíndrico se puede considerar como un círculo extruido en el eje  $z$ , el algoritmo que se utilizó para el contenedor circular puede ser útil para un contenedor cilíndrico, la generación de nodos comienza desde la base del contenedor ( $z = 0$ ), llenando esa sección transversal circular, se continúa generando nodos para el siguiente nivel de  $z$  ( $z = z + dz$ ) hasta llegar a la parte superior del contenedor  $z \leq H$ .

Con la malla construida se procede a empaquetar objetos como ya ha hecho, con la diferencia de que son ahora objetos de tres dimensiones, se pueden usar las normas establecidas para esferas y cubos dadas en el capítulo 5, un ejemplo para este tipo de instancia está en la fig.7.7.

Figura 7.7: Ejemplos - empaquetamiento de esferas en contenedor cilíndrico



## 7.6 GENERACIÓN DE MALLAS

La generación de mallas mas común en esta tesis es la rectangular, y esta es muy fácil de crear, solo teniendo un ancho  $W$  y un largo  $L$  y la cantidad de nodos que queremos generar por lado  $M$  y  $N$  respectivamente, el algoritmo básico se muestra a continuación:

---

### ALGORITMO BASICO GENERACIÓN-MALLA-RECTANGULAR

---

ENTRADA: Datos

-Característica contenedor  $W, L$

-Características de malla  $M, N$

---

SALIDA: Coordenadas  $x, y$  de los nodos de la malla

---

INICIO

1: Calcular  $dx = W/(M - 1)$  y  $dy = L/(N - 1)$

2: Iniciar coordenadas  $cx = r_{min}, cy = 0$

3: Iniciar indice nodo  $g = 1$

4: Para  $i = 1$  hasta  $N$

Para  $j = 1$  hasta  $M$

$x_g = cx$

$y_g = cy$

$g = g + 1$

$cx = cx + dx$

Fin Para

$cy = cy + dy$

$cx = 0$

Fin Para

FIN

---

Tomando como base este algoritmo podemos generar las mallas de todas nuestras experimentaciones, modificandolo para considerar si existe o no frontera o para verificar si el punto pertenece al contenedor.

**ALGORITMO MODIFICADO GENERACIÓN-MALLA-RECTANGULAR**

ENTRADA: Datos

-Característica contenedor  $W, L$ -Características de malla  $M, N$ -Radio mínimo para eliminar frontera  $r_{min}$ SALIDA: Coordenadas  $x, y$  de los nodos de la malla

INICIO

1: Calcular  $dx = (W - 2r_{min})/(M - 1)$  y  $dy = (L - 2r_{min})/(N - 1)$ 2: Iniciar coordenadas  $cx = r_{min}, cy = r_{min}$ 3: Iniciar indice nodo  $g = 1$ 4: Para  $i = 1$  hasta  $N$ Para  $j = 1$  hasta  $M$ Si  $(x, y) \in Contenedor$  $x_g = cx$  $y_g = cy$  $g = g + 1$ 

Fin Si

 $cx = cx + dx$ 

Fin Para

 $cy = cy + dy$  $cx = r_{min}$ 

Fin Para

FIN

Existen otras formas de mallas que pueden considerarse, por ejemplo la malla hexagonal teóricamente podría ofrecer mejores resultados que una malla rectangular[19] y se puede aplicar un algoritmo para generarla.

El algoritmo para la generación de coordenadas hexagonales se plantea de forma semejante al de las mallas rectangulares pero este se deben eliminar nodos que no formarían un hexágono, se presenta este algoritmo de generación de malla hexagonal y ejemplos de soluciones de instancias (fig. 7.8) con una malla hexagonal.

---

**ALGORITMO GENERACIÓN-MALLA-HEXAGONAL**


---

ENTRADA: Datos

-Característica contenedor  $W, L$ -Características de malla  $M, N$ SALIDA: Coordenadas  $x, y$  de los nodos de la malla

INICIO

1: Calcular  $dx = (W - 2r_{min})/(M - 1)$  y  $dy = (L - 2r_{min})/(N - 1)$ 2: Iniciar coordenadas  $cx = r_{min}, cy = r_{min}$ 3: Iniciar indice nodo  $g = 1$ 4: Iniciar linea de hexágono  $lhex = 0$ 5: Para  $i = 1$  hasta  $N$     Para  $j = 1$  hasta  $M$         residuo =  $j - 1 \bmod 4$         Si  $lhex = 0$  entonces            Si  $0 \leq \text{residuo} \leq 3$                  $x_g = cx$                  $y_g = cy$                  $g = g + 1$ 

Fin Si

Si no

Si residuo=0 o residuo=3

 $x_g = cx$                  $y_g = cy$                  $g = g + 1$ 

Fin Si

Fin Si

 $cx = cx + dx$ 

Fin Para

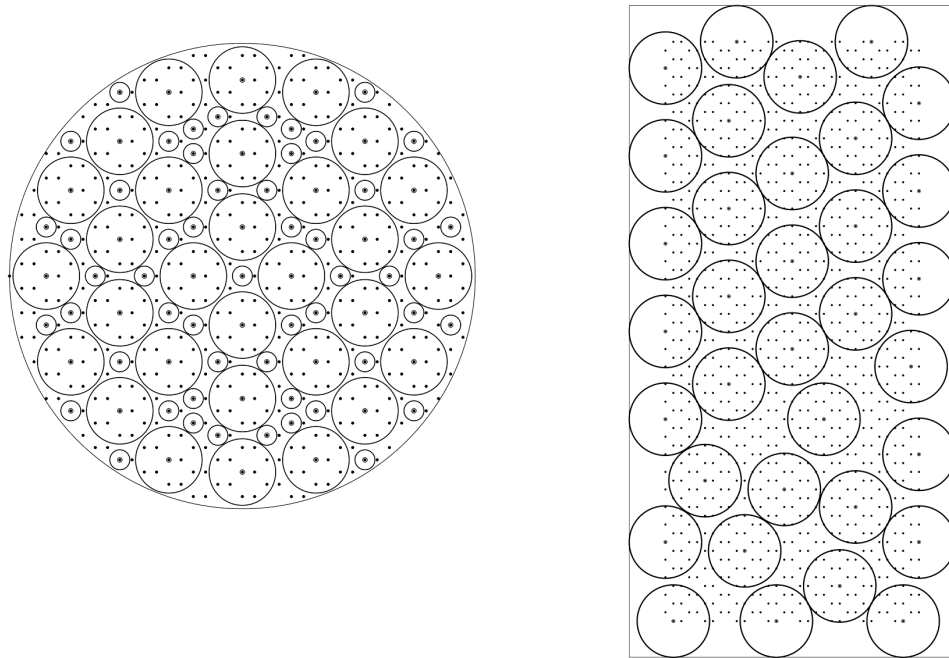
 $cy = cy + dy$          $cx = r_{min}$          $lhex = !lhex$ 

Fin Para

FIN



Figura 7.8: Ejemplos - empaquetamiento con malla hexagonal



## CAPÍTULO 8

# EXPERIMENTACIÓN (CÍRCULOS)

---

En este capítulo se detalla la experimentación de empaquetamiento con objetos circulares, llevada a cabo con el modelo matemático y sus variantes con desigualdades validas, ademas de la comparación con el modelo del caso compacto, también se realiza experimentación para el caso de objetos de diferentes tipos con y sin telescopia.

### 8.1 OBJETIVOS

En las siguientes experimentaciones se busca comparar el rendimiento de diversas formulaciones del modelo matemático de esta investigación, se busca comparar el modelo compacto vs el modelo estándar y también el modelo estándar con y sin desigualdades validas, ademas de mostrar resultados experimentales acerca del empaquetamiento tipo telescopia.

### 8.2 EXPERIMENTACIÓN (CÍRCULOS DE UN SOLO TIPO )

Los experimentos en esta sección por ser instancias con un solo tipo de circulo a empaacar no es posible utilizar el empaquetamiento tipo telescopia.

### 8.2.1 SOBRE LAS INSTANCIAS Y EL DISEÑO DE MALLA

La experimentación fue realizada con nueve instancias usadas por Galiev y Lisafina [?], las cuales son utilizan un contenedor rectangular y un solo tipo de objeto circular a empacar por instancia. Las características consideradas para el diseño de mallas es que estas son mallas uniformes cuadradas, esto es que la distancia entre puntos contiguos, en los ejes  $x$  o  $y$  es la misma.

Tabla 8.1: Características de instancias y malla

Instancia	Radio	$\Delta$	M	N	n
1	0.5000	0.1250000	17	41	697
2	0.6250	0.1562500	23	61	1403
3	0.5625	0.0703125	31	79	2449
4	0.3750	0.0468750	25	57	1425
5	0.3125	0.0781250	31	69	2139
6	0.4375	0.0546875	39	94	3666
7	0.2500	0.0625000	41	89	3649
8	0.2750	0.0687500	36	80	2880
9	0.1875	0.0468750	57	121	6897

Las características de las instancias y detalles de la malla se listan en la tabla 8.1, la primer columna indica el identificador o número de instancia, la segunda el radio del objeto (radio del circulo en esta experimentación), la tercera es la separación entre nodos de la malla, las columnas cuarta y quinta son el número de nodos en dirección  $x$  y dirección  $y$  respectivamente, la ultimas es la cantidad total de nodos de la malla.

### 8.2.2 DISEÑO DE EXPERIMENTOS

La experimentación que se llevó a cabo contempla dos modelos y todas sus posibles variantes, el modelo standard (S), con la restricción de intersección clásica y el modelo compacto (CMP) que utiliza la restricción de intersecciones reducida o compacta, para el modelo standard la experimentación se realiza con y sin desigualdades validas ademas de si y con restricciones de intersección redundantes , en cada una de estas experimentaciones se obtiene la relajación lineal, la experimentación en total lleva a cabo dieciséis experimentos para cada una de las instancias, las cuales

se listan en la tabla 8.2.

En esta experimentación se considera que no existe limitación en cuanto al

Tabla 8.2: Experimentación, Diseño

Id	Modelo	Formulación	Variante
1	Standard (S)	Mitad (MID)	SC
2			CC
3			C1
4			C2
5	Standard (S)	Completo(FULL)	SC
6			CC
7			C1
8			C2
9	Compacto (CMP)	Mitad (MID)	SC
10			CC
11			C1
12			C2
13	Compacto (CMP)	Completo(FULL)	SC
14			CC
15			C1
16			C2

mínimo o máximo de objetos que haya que colocar y al ser un empaquetamiento de objetos iguales se utilizó el modelo sin frontera, el tiempo máximo establecido para calcular la solución optima ( $GAP = 0\%$ ) se fijó en 12 horas.

### 8.2.3 HARDWARE Y SOFTWARE

Todas las instancias fueron ejecutadas utilizando el solver CPLEX versión 12.6, con C++ como el lenguaje de modelado, en una computadora de escritorio con un procesador AMD FX8350 de 4Ghz con 8 núcleos y 32 Gb de RAM.

## 8.3 RESULTADOS DE EXPERIMENTACIÓN

Los resultados se han dividido en tres partes para fines comparativos, en la primer parte se calcula la cota lineal , en la segunda se muestra un resumen de

resultados de modelos standard y compacto, en la tercera parte se muestran los resultados completos tanto de modelo standard como compactos al introducir o no las desigualdades válidas.

### 8.3.1 RESULTADOS, RELAJACIÓN LINEAL

Se muestran los resultados de la relajación lineal, para demostrar si la introducción de las desigualdades validas ofrece una mejor cota lineal como se mencionó en el capítulo 4. La tabla 8.3 muestra la diferencia entre cotas (solución optima vs relajación lineal) entre un modelo (standard o compacto) que usa desigualdades validas a uno que no las utiliza, mostrándose que estas ofrecen mejores cotas al ser incluidas en el modelo.

Tabla 8.3: Resultados, relajación lineal

Instancia	n	$z$	$LP_S C$	$LP_C C$
1	697	18	348.5	19
2	1403	10	701.5	10
3	2449	13	1224.5	14.07
4	1425	32	712.5	36.33
5	2139	45	1069.5	53.4
6	3666	21	1833.5	23.86
7	3649	74	1824.5	90.98
8	2880	61	1440.0	72
9	6897	140	3448.5	162

### 8.3.2 RESULTADOS, MODELO STANDARD VS COMPACTO

En la tabla 8.4 se encuentran los resultados de la experimentación usando el modelo standard y compacto sin desigualdades validas.

Tabla 8.4: Solución entera sin desigualdades validas (S/SC o CMP/SC) y  $Gap = 0\%$ 

ID.	radio	n	$z_i$	S/FULL	S/MID	CMP/FULL	CMP/MID
1	0.5	697	18	2	1	276	5
2	0.625	1403	10	71	41	1040	50
3	0.5625	2449	13	337	186	11666	831
4	0.375	1425	32	6	4	2698	169
5	0.3125	2139	45	96	114	*	*
6	0.4375	3666	21	17473	17654	*	*
7	0.25	3649	74	*	*	*	*
8	0.275	2880	61	132	177	*	*
9	0.1875	6897	140	*	*	*	*

En la tabla 8.4, las primeras tres columnas indican el ID. de la instancia, el radio del circulo a empacar y la dimensión de la malla que nos indica la cantidad de variables binarias  $n$ , la cuarta columna  $z_i$  muestra la mejor cota entera (o cantidad de círculos) alcanzada, las siguientes dos columnas son los tiempos para el modelo standard (S) con y sin redundancias (S/SC) y las últimas dos son las que refieren al modelo compacto con (CMP/FULL) y sin redundancias (CMP/MID).

En la tabla 8.5 se encuentra un resumen de los resultados de la experimentación para el caso del modelo standard y compacto con desigualdades valida mostrándose solamente los mejores tiempos , las indicaciones son las mismas que en la anterior tabla 8.4, se indica entre paréntesis en que modelo se encontró este mejor tiempo.

Los resultados de estas tabla (8.4 y 8.5) indican que los modelos compactos a pesar de tener menor tamaño, no se tienen mejores tiempos como se esperaría en un modelo de menor tamaño, ademas de que no se pudieron resolver todas las instancias aun agregando desigualdades validas, el modelo standard logro obtener mejores resultado y cuando se agregaron las desigualdades validas pudo resolver todas las instancias a optimalidad.

Tabla 8.5: Solución entera con desigualdades validas (S/CC o CMP/CC) y  $Gap = 0\%$

ID.	radio	$n$	$z_i$	S/FULL	S/MID	CMP/FULL	CMP/MID
1	0.5	697	18	1(C2)	1(C1/C2/C1+C2)	4(C1/C2/C1+C2)	4 (C1/C2)
2	0.625	1403	10	12(C2)	9(C2)	27(C2)	12(C1)
3	0.5625	2449	13	81(C2)	72(C2)	36(C2)	34(C1/C2)
4	0.375	1425	32	6(C2)	3(C2)	28(C2)	92(C1)
5	0.3125	2139	45	150(C1+C2)	180(C2)	818(C2)	1027(C1)
6	0.4375	3666	21	1122(C1+C2)	776(C1+C2)	39260(C2)	*
7	0.25	3649	74	3531(C1)	2978(C1+C2)	*	*
8	0.275	2880	61	87(C1)	87(C1)	2146(C1+C2)	2188(C1+C2)
9	0.1875	6897	140	17193(C2)	11892(C1+C2)	*	*

Los resultados completos de esta experimentación están las tablas 8.6 y 8.7 que muestran los tiempos de solución en segundos obtenidos para alcanzar optimalidad ( $Gap = 0\%$ ).un asterisco (\*) simboliza que la solución óptima no fue alcanzado en el tiempo establecido como límite (12 horas), en estas tablas puede observarse que los tiempos usados en los modelos con desigualdades validas son notoriamente menores a los que no tienen desigualdades validas cuando las instancias son grandes.

Las tablas 8.8 y 8.9 corresponden a los tiempos de solución alcanzados para alcanzar un suboptimo de al menos  $Gap = 5\%$ . En esta tablas puede observarse que se puede llegar a buenas soluciones en menos de una hora, en la mayoría de los casos se alcanzó la cota optima ( $GAP = 0\%$ ), esto es más notorio en el caso del modelo standard con desigualdades validas, el numero entre paréntesis en la primer columna indica la cota alcanzada para ese modelo y solo se vuelve a indicar en las siguientes columnas si este valor cambia.



Tabla 8.6: Tiempos para solución entera, modelo (S), con/sin desigualdades validas,  $Gap = 0\%$

id	S	S/C1	S/C2	S/C1+C2	S/MID	S/MID/C1	S/MID/C2	S/MID/C1+C2
1	2	2	1	2	1	1	1	1
2	71	15	12	18	41	11	9	10
3	337	82	81	83	186	75	72	73
4	6	9	6	8	4	4	3	4
5	96	163	157	150	114	189	180	191
6	17473	1392	1355	1122	17654	1379	1364	776
7	*	3531	350	5542	*	3178	3186	2978
8	132	87	103	88	177	87	103	104
9	*	17437	17193	24602	*	*	*	11892

Tabla 8.7: Tiempos para solución entera, modelo (CMP), con/sin desigualdades validas,  $Gap = 0\%$

id	CMP	CMP/C1	CMP/C2	CMP/C1+C2	CMP/MID	CMP/MID/C1	CMP/MID/C2	CMP/MID/C1+C2
1	276	4	4	4	5	4	4	5
2	1040	35	33	27	50	12	13	16
3	11666	37	36	41	831	32	32	34
4	2698	29	28	31	169	92	94	87
5	*	819	818	1019	*	1027	1029	1849
6	*	39347	39260	41654	*	*	*	*
7	*	*	*	*	*	*	*	*
8	*	2523	2525	2146	2146	87	103	2188
9	*	*	17193	*	*	*	*	*

Tabla 8.8: Tiempos para solución entera para modelo (S) con/sin desigualdades validas,  $Gap = 5\%$

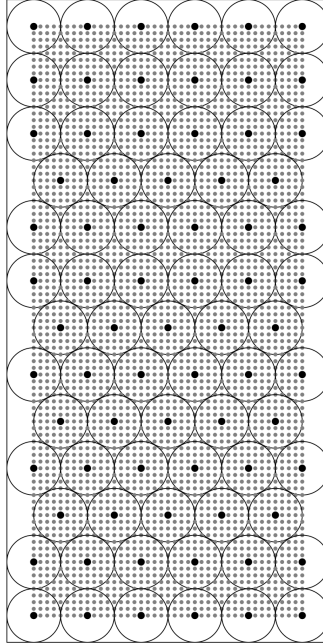
id	S	S/C1	S/C2	S/C1+C2	S/MID	S/MID/C1	S/MID/C2	S/MID/C1+C2
1	4(18)	1	1	1	1	1	1	1
2	62(10)	13	13	13	42	11	11	10
3	285(13)	83	82	83	213	75	75	74
4	4(32)	6	6	7	4	3	3	4
5	28(45)	28	27	34	26	42	41	33
6	17447(21)	1586	1579	1538	17654	1379	1364	776
7	1373(73)	2161(74)	2130	1782	1978	1716	1756	1882
8	39(60)	77(59)	71	58	19(61)	81(60)	65(59)	69(59)
9	2121(131)	2601	2590	2316	3768	3458	3515	3194

Tabla 8.9: Tiempos para solución entera para modelo (CMP) con/sin desigualdades validas,  $Gap = 5\%$

id	CMP	CMP/C1	CMP/C2	CMP/C1+C2	CMP/MID	CMP/MID/C1	CMP/MID/C2	CMP/MID/C1+C2
1	6(18)	3	2	3	2	2	2	2
2	372(10)	21	31	28	48	9	9	12
3	11163(13)	30	30	32	1063	27	26	26
4	234(32)	13	12	14	115	54	53	75
5	*(44)	417(45)	424	1043	*	634	630	568
6	*(20)	39347(21)	39260	33321	*	*	*	*
7	*(63)	*(74)	*	*(73)	*	7314	7341	7340
8	*(50)	1819(59)	1809	1325(61)	31859(61)	1999	1972	1701(59)
9	*(116)	*(135)	*	*(136)	*(135)	*	*	*

Una de las soluciones (inst. 7) encontradas puede verse en la fig. 8.1, el resto de las soluciones puede encontrarse en el apéndice A.

Figura 8.1: Inst. 7,74



## 8.4 EXPERIMENTACIÓN (DIFERENTES CÍRCULOS)

### 8.4.1 SOBRE LAS INSTANCIAS Y EL DISEÑO DE MALLA

En esta experimentación fueron estudiadas seis instancias usadas por Litvinchev y Ozuna [41], se utiliza un contenedor cuadrado, de 60x60, con un diseño de malla de 41x41 y cuatro tipos de círculos, se resolvieron las instancias sin y con telescopía.

Las características de las instancias están en la tabla 8.11, en esta se muestra la cantidad mínima y máxima de objetos exigida para cada instancia  $(m_k, M_k)$ . El

Tabla 8.10: Características de objetos

k	Radio	Área
1	(2	452.389
2	4	50.2654
3	2	12.5664
4	0.7	1.53938

modelo considerado en esta experimentación, es el modelo estándar sin desigualdades validas, con frontera (S/SC/CF), El tiempo máximo establecido para encontrar la solución óptima ( $GAP = 0\%$ ) fue de 12 horas.

Tabla 8.11: Características instancias (difs. tipos)

id	k	$m_k$	$M_k$
	1,2,3,4	1,2,3,4	1,2,3,4
1	12,4,2,0.7	0,0,0,0	$\infty, \infty, \infty, \infty$
2	12,4,2,0.7	0,0,0,0	5,30,30,120
3	12,4,2,0.7	4,25,25,50	5,30,30,120
4	12,4,2,0.7	3,25,30,80	$\infty, \infty, \infty, \infty$
5	12,4,2,0.7	0,0,0,0	6,35,35,20
6	12,4,2,0.7	3,25,30,80	6,35,35,20

#### 8.4.2 HARDWARE Y SOFTWARE

Las instancias fueron ejecutadas utilizando el solver CPLEX versión 12.6, utilizando C++ como el lenguaje de modelado, en una computadora de escritorio con un procesador Intel Core i7, a 3.4Ghz con 8 hilos de procesamiento y 16 Gb de RAM.

### 8.4.3 RESULTADOS, PROBLEMA ENTERO

La tabla 8.12 muestra los resultados correspondientes a las soluciones sin telescopía la tabla 8.13 corresponde a la instancias con telescopía, en las tablas se muestran los resultados de cada instancia, la primer columna identifica la instancia, la segunda los tipos de objeto  $k$  con su radio, la tercera la cantidad de objetos  $O_k$  para cada tipo, la cuarta el área total(At) cubierta por los círculos, la quinta el GAP y la ultima el tiempo alcanzado para encontrar la solución, el asterisco (\*) indica que la solución optima no fue alcanzada en el tiempo limite, el doble asterisco (\*\*) indica que no fue encontrada solución factible, las figuras 8.2 y 8.3 corresponden a la solución encontrada para la instancia 5 sin y con telescopía, el resto de las soluciones puede encontrarse en el apéndice A.

Tabla 8.12: Soluciones IP, varios tipos de objetos

id	k	$O_k$	At	GAP	Tiempo
	1,2,3,4	1,2,3,4			
1	12,4,2,0.7	150, 12, 8, 5	3045.77	0.032	*
2	12,4,2,0.7	120, 11, 9, 5	3037.29	0.034	*
3	12,4,2,0.7	**	**	**	**
4	12,4,2,0.7	**	**	**	**
5	12,4,2,0.7	124,11,9,5	3043.45	0.034	*
6	12,4,2,0.7	**	**	**	**

## 8.5 CONCLUSIONES

En estas experimentación se logro demostrar que se pueden calcular buenas soluciones en el empaquetamiento de círculos con un modelo lineal y entero, ademas de mostrar la mejora de la cota lineal al introducir desigualdades validas y comparar el rendimiento de varias formulaciones, demostrando que el modelo estándar con desigualdades validas muestra mejores tiempos experimentales sobre formulaciones

Tabla 8.13: Soluciones IP, varios tipos de objetos, telescopía

id	k	$O_k$	At	GAP	Tiempo
	1,2,3,4	1,2,3,4			
1	12, 4, 2, 0.7	5, 34, 53, 555	5491.34	0.233	43200
2	12, 4, 2, 0.7	5, 30, 30, 120	4331.62	0	2772
3	12, 4, 2, 0.7	5, 30, 30, 120	4331.62	0	2024
4	12, 4, 2, 0.7	5, 34, 55, 5	5501.08	0.2148	43200
5	12, 4, 2, 0.7	5, 34, 35, 200	4718.67	0.0106	43200
6	12, 4, 2, 0.7	5, 34, 35, 200	4718.67	0.0106	43200

Figura 8.2: (5)

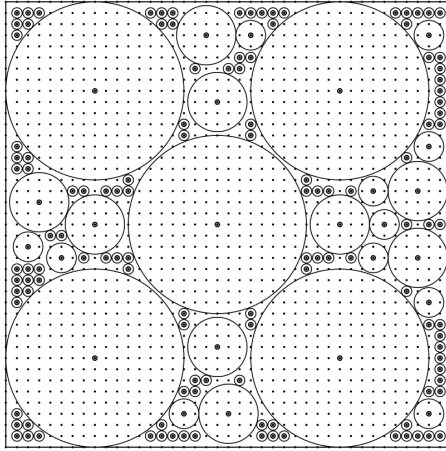
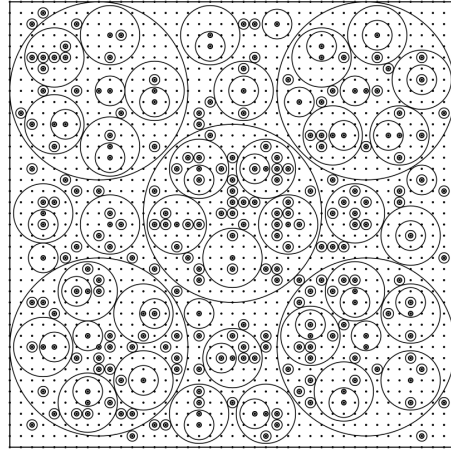


Figura 8.3: (5)



compactas confirmando la demostración matemática que se había hecho sobre esto.

## CAPÍTULO 9

# EXPERIMENTACIÓN (OBJETOS CIRCULARES)

---

En este capítulo se presenta un estudio numérico acerca del empaquetamiento de objetos del tipo circular, usando las norma definidas para estos objetos.

### 9.1 OBJETIVO

El objetivo de esta experimentación es aplicar el modelo matemático de esta tesis con objetos que no han sido tan abordados en la literatura sobre el empaquetamiento, y como las desigualdades validas pueden seguir siendo útiles con otros objetos diferentes al circular, y finalmente se muestran resultados experimentales para el empaquetamiento de objetos octagonales con espesor para el caso de telescopía.

### 9.2 EXPERIMENTACIÓN, DIFERENTES OBJETOS

#### 9.2.1 DISEÑO DE EXPERIMENTOS

Para esta experimentación se utilizaron las 9 instancias del capítulo 8, redefiniendo la norma según el objeto a empacar. La frontera pudo ser eliminada permitiendo usar el modelo sin fronteras. Las normas usadas y su objeto correspondiente

se muestran en la tabla ??.

ID(abv).	Objeto	Norma
C	Círculos	$\ z\  = \sqrt{x^2 + y^2}$
R	Rombos	$\ z\  = \max\{ x  +  y \}$
O	Octágonos	$\ z\  = \max\{ x ,  y , (1/\sqrt{2})( x  +  y )\}$
E	Elipse	$\ z\  = \sqrt{2x^2 + y^2}$

### 9.2.2 HARDWARE Y SOFTWARE

Todas las instancias fueron ejecutadas utilizando el solver CPLEX versión 12.6, utilizando C++ como el lenguaje de modelado, en una computadora de escritorio con un procesador AMD FX8350 de 4Ghz con 8 núcleos y 32 Gb de RAM.

### 9.2.3 RESULTADOS DE EXPERIMENTACIÓN

Los resultados de la experimentación están dados en la tablas ?? y ?? para cada uno de los distintos objetos, la primer parte de la experimentación fue el calculo de la relajación lineal de las instancias, la segunda parte fue el calculo de las cotas optimas con el modelo entero.

Los resultados de la primer de la experimentación están la tabla 9.1 que muestra la diferencia de cota lineal sin considerar desigualdades válidas y con desigualdades validas en el modelo, la primer columna indica número de instancia, la segunda el número de nodos(columna  $n$ ), la tercera indica la relajación lineal sin ningún desigualdad valida (columna LP). Las siguientes indican cota entera final (columnas C,E,O y R) y la cota lineal con desigualdades validas(LPC) para cada objeto, el objetivo de esta experimentación es observar la mejora de la cota lineal al colocar las desigualdades validas. El introducir las desigualdades validas mejora significativamente la calidad de la cota lineal, la cota lineal sin desigualdades validas es la misma para todos los tipos de objetos y es exactamente la mitad de la dimensión  $n$



Tabla 9.1: Resultados - relajación lineal

id	$n$	LP	O	LPC	R	LPC	C	LPC	E	LPC
1	697	348.5	18	19	28	33.43	18	19	34	36
2	1403	701.5	9	10	15	16.87	10	10	21	25
3	2449	1224.5	12	140743	20	22.25	13	14.07	27	29.91
4	1425	712.5	26	309485	39	41.37	32	36.33	59	68.86
5	2139	1069.5	41	534043	76	94.76	45	53.4	99	110
6	3666	1833.5	20	225537	35	39.72	21	23.86	43	49787
7	3649	1824.5	72	909767	127	157.96	74	90.98	137	182
8	2880	1440	50	59014	75	79.53	61	72	108	134.56
9	6897	3448.5	106	134342	167	182.28	140	162	261	273.6

de las instancias, ya que aquí todas las variables toman el valor de 0.5, un estudio mas detallado de esto puede encontrarse en el capítulo 8 para el caso de los círculos y un método heurístico para aprovechar la estructura resultante se muestra en el capítulo 12.

Tabla 9.2: Cotas enteras de instancias

Instancia	radius	$\delta$	n	O	CPU	R	CPU	C	CPU	E	CPU
1	0.5	0.125	697	18	1	28	1	18	1	34	11
2	0.625	0.15625	1403	9	52	15	11	10	41	21	25
3	0.5625	0.0703125	2449	12	202	20	312	13	186	27	288
4	0.375	0.046875	1425	26	49	39	399	32	4	59	2
5	0.3125	0.078125	2139	41	6850	76	6	45	114	99	3
6	0.4375	0.0546875	3666	20	1430	35	2829	21	17654	43	-4
7	0.25	0.0625	3649	72	22	127	17	74(5)	*	137(7)	*
8	0.275	0.06875	2880	50	20495	75(4.6)	*	61	177	108(6)	*
9	0.1875	0.046875	6897	106(12.5)	*	167(9)	167	*	140(5)	*	261(4)

Los resultados de la segunda parte de la experimentación están en la tabla ??, en esta tabla se muestran los tiempos alcanzados (columna CPU) para alcanzar la

cota optima del problema ( $GAP = 0\%$ ) o en caso de no alcanzarse se indica la cota alcanzada, que corresponde con la cantidad de objetos empacados(columna con la abreviatura de la clase de objeto, ejemplo C = círculos) y el GAP de esta solución en caso de no haberse alcanzado optimalidad, se estableció un límite para alcanzar optimalidad de 12 horas, los tiempos (Columna CPU) marcados con asterisco indican que se alcanzó el límite.

En esta experimentación y como puede verse en la tabla ??, no todas las instancias pudieron resolverse a optimalidad con el límite de tiempo dado, pero logro alcanzarse un suboptimo aproximadamente de entre el 5% y 10% , aunque en la mayor parte de los casos puede obtenerse en pocos segundos una buena cota, cercana o igual a la obtenida en las doce horas establecidas como límite de cálculo, por ejemplo para el caso de los octágonos en la instancia 9, logra obtenerse en 300 segundos 105 objetos, apenas uno menos que el alcanzado en las 12 horas, para la instancia 5 los 41 objetos de la solución óptima son alcanzados en 30 segundos y para la instancia 6 , 19 objetos son calculadas en apenas 30 segundos.

Un comportamiento similar se mostró en los otros objetos, sobre todo en los objetos cuyo tiempo de cálculo excede los 1000 segundos. Buenas soluciones para todas las instancias pueden encontrarse a los 600 segundos de tiempo de cálculo por lo que puede decirse que usar el modelo para encontrar soluciones factibles en un tiempo razonable ya que este es comparable al rendimiento que pudieran ofrecer heurísticas (por ejemplo las heurísticas para empacar círculos de Galiev y Lisafina[?].

Las figuras 9.1,9.2,9.3 muestran la solución encontrada para la instancia 7, el resto de las soluciones pueden encontrarse en el apéndice B.

Figura 9.1: Inst. 7

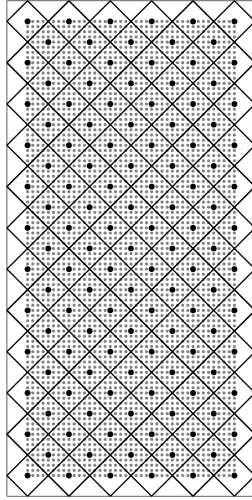


Figura 9.2: Inst. 7

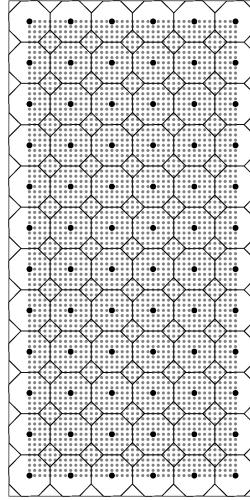
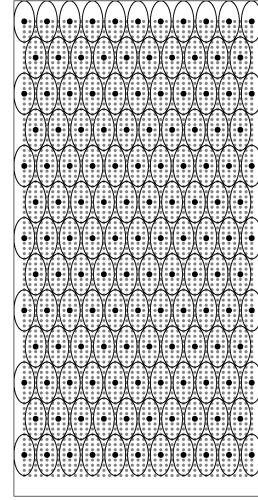


Figura 9.3: Inst. 7



## 9.3 EXPERIMENTACIÓN CON OCTÁGONOS, CON Y SIN TELESCOPIA

### 9.3.1 DISEÑO Y RESULTADOS DE EXPERIMENTACIÓN

Con el objetivo de mostrar el comportamiento del modelo con mas de un tipo de objeto a empacar en un contenedor, se realizó una experimentación para objetos de la clase octágono regular, sin telescopía, con telescopía y con telescopía con objetos con espesor, se usaron dos tipos de objetos para ser colocados en cada instancia, en un contenedor de 30x30 unidades , el espesor (th) se propuso como un 10 % del radio de los objetos , las características de las instancias se muestran en la tabla??.

El objetivo de esta experimentación fue de maximizar el área ocupada por los objetos(vector de pesos  $W_k$  igual al área de cada objeto), el solver utilizado fue CPLEX v12.6, en una computadora de escritorio con 4ghz , 32 gb de RAM y 8 núcleos, el tiempo máximo establecido para alcanzar optimalidad (GAP=0) fue de 43200 segundos o doce horas.

Los resultados y las características de los tipos de objetos, se muestran en la

Tabla 9.3: Diseño de instancias (octágonos)

Instancia	$r_1, r_2$	$th_1, th_2$	N,M,n
1	0.6, 6.3	0.06, 0.63	21,21,441
2	0.6, 6.3	0.06,0.63	31,31,961
3	0.6, 6.3	0.06,0.63	41,41,1681
4	1, 5.3	0.1, 0.53	21,21,441
5	1, 5.3	0.1, 0.53	31,31,961
6	1, 5.3	0.1, 0.53	41,41,1681

tabla ??, las dos primeras columnas indican el número de instancia, y el número de puntos de la malla respectivamente, la siguientes dos columnas indican la cantidad de objetos por tipo y el área total ocupada por los octágonos  $z$  separado por comas y el tiempo  $CPU$  para el caso sin telescopía (ST), las siguientes dos columnas indican la cantidad de objetos por tipo y el área total ocupada por los octágonos  $z$  separado por comas y el tiempo  $CPU$  en segundos para el caso con telescopía (CT), las ultimas dos columnas indican la cantidad de objetos por tipo y el área total ocupada por los octágonos  $z$  separado por comas y el tiempo  $CPU$  para el caso con telescopía en objetos con espesor (CTB).

Tabla 9.4: Experimentación con octágonos, con y sin telescopía

ID.	n	ST		CT		CTB	
		$o_1, o_2, z$	CPU(s)	$o_1, o_2, z$	CPU(s)	$o_1, o_2, z$	CPU(s)
1	441	85,4,627.48	1	265,4,842.21	1	233,4,804.37	1
2	961	145,5,699.06	6	373,4,971.05	3	353,4,947.19	5
3	1681	127,4,677.586	6	326,4,914.98	*(3.2 %)	291,4,873.228	*(0.2 %)
4	441	41,6,699.35	1	119,6,952.82	1	113,6,932.94	1
5	961	114,4,750.09	57	181,6,1158.27	129	139,6,1019.1	49
6	1681	40,6,691.04	*(4 %)	144,6,1035.67	*(7.4 %)	126,6,976.019	*(9.9 %)

Las figuras ??,9.5.?? muestran las soluciones correspondientes a la instancia 5,

el resto de las soluciones puede encontrarse en el apéndice B.

Figura 9.4: 5,ST

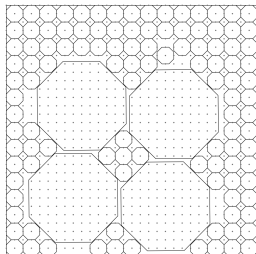


Figura 9.5: 5,CT

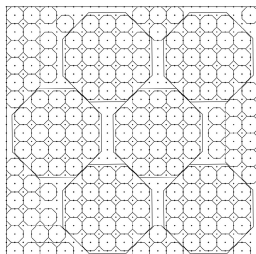
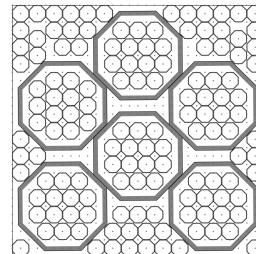


Figura 9.6: 5,CTB



## 9.4 CONCLUSIONES

Este capítulo demuestra que las formulaciones propuestas son válidas para objetos de distinta clase aparte de la forma circular, solo cambiando la definición de distancia (norma), se lograron empacar objetos como rombo, elipse octágono, adicionalmente se comprobó que las desigualdades validas pueden utilizarse para distintas clases de objetos, mejorando la cota lineal como en el caso del círculo.

## CAPÍTULO 10

# EXPERIMENTACIÓN (OBJETOS ESTRELLA)

---

El objeto estrella es una clase especial de objeto formado por dos objetos mas simples un cuadro y un rombo, para conocer el modo de abordar este objeto puede consultar el capitulo 6 sobre objetos irregulares, en este capitulo se hace una experimentación con este objeto para los casos de un solo tipo de objeto , de varios tipos de objetos y el caso con telescopía.

### 10.1 OBJETIVOS

En este capitulo se pretende demostrar la validez del modelo y su rendimiento empaquetando objetos que no han sido tratados en la literatura.

### 10.2 EXPERIMENTACIÓN CON UN SOLO TIPO DE OBJETO

#### 10.2.1 DISEÑO DE EXPERIMENTOS

Para la experimentación fue considerado el modelo standard (S)y las 3 variantes con desigualdades validas para verificar el beneficio de estas (tabla 10.2), se redujo

la cantidad de intersecciones a la mitad eliminando redundancias (SR). Fueron consideradas las 9 instancias Litvinchev[1] para el empaquetamiento de círculos pero ahora considerando el objeto estrella (star-object) , para empacar en el contenedor rectangular , las características de estas instancias, junto con las características del equivalente objeto estrella esta en la tabla 10.2.1 para el diseño del objeto estrella se uso parámetro  $\alpha=0.666$  (ver capitulo 6).

La experimentación se dividió en dos partes, en la primera se obtienen las

Tabla 10.1: Características de instancias

Instancia	Radio	ra, rb	W	L	N	M	n
1	0.5	0.333, 0.5	3	6	17	41	697
2	0.625	0.41625, 0.625	3	6	23	61	1403
3	0.5625	0.374625, 0.5625	3	6	31	79	2449
4	0.375	0.24975, 0.375	3	6	25	57	1425
5	0.3125	0.208125, 0.3125	3	6	31	69	2139
6	0.4375	0.291375, 0.4375	3	6	39	94	3666
7	0.25	0.1665, 0.25	3	6	41	89	3649
8	0.275	0.18315, 0.275	3	6	36	80	2880
9	0.1875	0.124875, 0.1875	3	6	57	121	6897

cotas de la relajación de cada modelo y en la segunda se obtiene la solución entera. El hardware utilizado es un computadora con procesador AMD-FX de 8 núcleos, con 32 gb de RAM, el solver utilizado es CPLEX 12.6 - 64bits, el tiempo máximo de prueba permitido para alcanzar la solución optima fue de 12 horas.

### 10.2.2 RESULTADOS

Los resultados de la experimentación se encuentran en dos tablas, en la tabla 10.3 se detallan las cotas alcanzadas por la relajación lineal para cada tipo de modelo probado, en la primer columna se identifica la instancia, en la segunda se muestra

Tabla 10.2: Experimentación, Diseño

Id	Modelo	Formulación	Variante
1	Standard	Mitad	SC
2			CC
3			C1
4			C2

la cantidad de nodos de la malla probada y en las columnas restantes se muestra la cota calculada

En la tabla 10.4 se dan los resultados de la segunda parte de la experimentación la cual era el calculo la solución optima entera, la primer columna identifica la instancia, la segunda la cantidad de nodos de esta, la tercera la mejor cota entera calculada, las siguientes cuatro muestran los tiempos de calculo para cada tipo de modelo , las cuatro ultimas muestran el GAP alcanzado en la solución.

Una de las soluciones encontradas puede verse en la fig. 10.1, el resto de las soluciones puede encontrarse en el apéndice C.

### 10.3 EXPERIMENTACIÓN CON MAS DE UN TIPO DE OBJETO Y TELESCOPIA

### 10.4 DISEÑO DE EXPERIMENTOS

Se realizo una pequeña experimentación con el objeto estrella para los con (CT) y sin telescopía (ST),se diseñaron cuatro instancias, en las que se deben empacar 2 y 3 objetos de distintos tipos (o distintos radios),se utilizo el parámetro  $\alpha=0.666$  para el diseño de los objetos estrella y se probaron dos distintas mallas, la tabla 10.5



Tabla 10.3: Resultados de experimentación con relajación lineal (RL)

Inst.	Dim.(n)	Cotas			
		SC	C1	C2	CC
1	697	348.5	28.9967	28.9967	28.9967
2	1403	701.6	13.8646	13.8646	13.8646
3	2449	1225	16.9706	16.9706	16.9706
4	1425	712.6	41.3742	41.3742	41.3742
5	2139	1069.5	82.162	82.162	82.162
6	3666	1833	32.3972	32.3972	32.3972
7	3649	1825	99.3511	99.3511	99.3511
8	2880	1440	109.0888	109.0888	109.0888
9	6897	3448.5	182.2792	182.2792	182.2792

Tabla 10.4: Tiempos y cotas para solución entera (IP), con/sin desigualdades validas,  $Gap = 0\%$ 

Inst.	Dim. (n)	COTAS (n. objetos)	Tiempos (seg)				GAP (%)			
			SC	C1	C2	CC	SC	C1	C2	CC
1	697	19	3	3	2	2	0	0	0	0
2	1403	12	77	12	11	12	0	0	0	0
3	2449	15	499	1082	971	887	0	0	0	0
4	1425	33	43204	43200	43201	43201	8.78	9.9	9.5	9.03
5	2139	54	22882	43200	43201(53)	16099	0	4.56	4.4	0
6	3666	27	43212	43200	31886	31082	6.97	6.07	0	0
7	3649	77	43200(76)	43200	43200	43200	19.17	17.8	17.8	17.9
8	2880	68	43200	43200	43200	43200	9.6	9.8	9.6	9.7
9	6897	140	43200	43200	43200	43200	21.8	21.5	21.5	20.7

muestra las características de estas instancias.

Para estas 4 instancias se calculo su mejor solución con un tiempo máximo de

Figura 10.1: Inst. 7

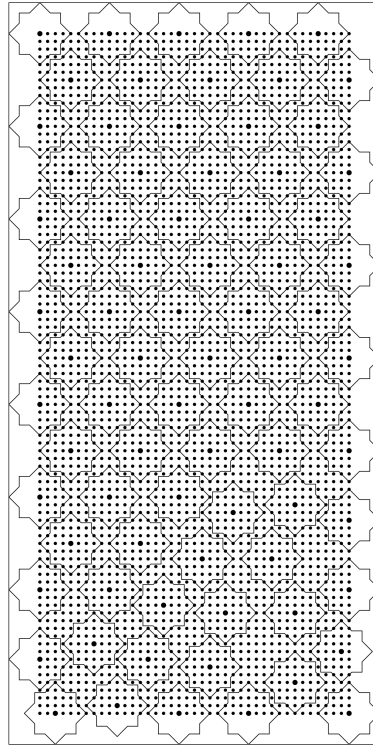


Tabla 10.5: Características de instancias, mas de un tipo de objeto y telescopía

Instancia	Radios(k) 1, 2, 3	Dimensiones		Malla		
		W	L	N	M	n
1 :1(2R)	8.4, 1.3	100	100	21	21	441
2: 2(3R)	13.35, 8, 1.15	100	100	21	21	441
3 :1(2R)	8.4, 1.3	100	100	41	41	1681
4: 2(3R)	13.35, 8, 1.15	100	100	41	41	1681

solver de 2 horas, para la instancia 4 se calculo la solución también para 8 y 24 horas de calculo, con solver cplex 12.6 en una computadora de escritorio AMD de 8 cores a 4 ghz y 32 gb de ram.

## 10.4.1 RESULTADOS DE EXPERIMENTACIÓN

Los resultados de la experimentación para las cuatro instancias, con 2 horas de tiempo máximo de solver están en tabla 10.6, se da el tiempo en segundos (CPU), el Gap para cada instancia y para cada uno de dos casos probados (ST y CT).

Tabla 10.6: Resultados experimentación (2horas)

Inst.	ST			CT		
	Z	CPU(s.)	%GAP	z	CPU (seg.)	%GAP
1: 1(2R)	5480.23	20	0	6910	14	0
2: 2(3R)	5769.6	6	0	7806.79	9	0
3 :1(2R)	6279.75	7200	2.66	7887.18	7200	10.72
4: 2(3R)	7342.6	7200	3.01	10436.1	7200	14.56

Figura 10.2: Inst. 3-ST

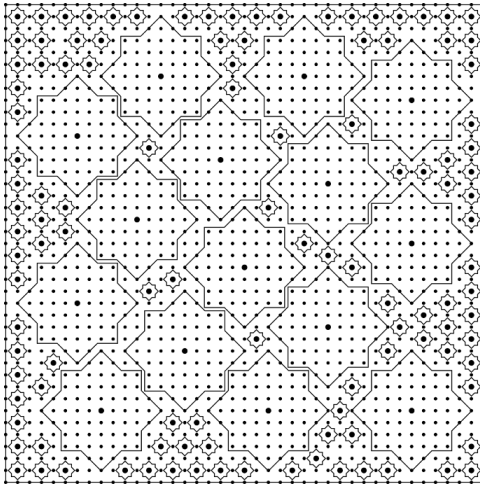
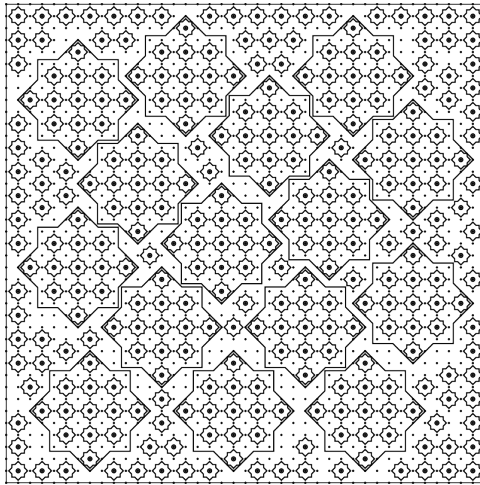


Figura 10.3: Inst. 3-CT



Para mostrar como el modelo de esta investigación puede aprovechar información que se tenga sobre la posible solución optima de un problema, para la instancia 4 se fijaron variables binarias  $x_{ik} = 1$  suponiendo que en los nodos correspondientes

a esas variables exista una buena posibilidad de asignar un objeto  $k$ , esta información se puede obtener analizando la estructura de las soluciones subóptimas que se tengan, la solución obtenida a partir de esta información puede ser mejor incluso mejor que la solución subóptima que se tenía, en la tabla 10.7 se muestra la solución alcanzada al proponer fijar variables ( $4^*$ ) y también la solución mejor que se tenía sin agregar al modelo información(4) se puede observar como se alcanza un óptimo en un tiempo notoriamente menor que para la solución previa (la cual solo alcanzo un subóptimo en 24 hrs.) aunque no se puede asegurar que esta nueva solución sea la solución óptima de la instancia original esta ofrece un buen resultado en mucho menor tiempo. (La imagen de esta nueva solución ( $4^*$ ) se encuentra en apéndice C).

Tabla 10.7: Comparativa soluciones, fijando  $x_i k == 1$

INST.	$z$	GAP (%)	CPU (s.)
4	10475.9	13.16	86400
$4^*$	10495.7	0	4

## 10.5 CONCLUSIONES

En este capítulo se realizó una experimentación con el objeto tipo estrella, los resultados aunque no pueden considerarse tan buenos como los obtenidos con los círculos ya que no todas las instancias se pudo llegar a la solución óptima, ofrecen al menos con desigualdades validas un GAP de al menos 19.94% (tabla ) y un poco menos con desigualdades validas(CUBS) en doce horas (tabla de análisis de probabilidad P 10.8). La experimentación con diversos tipos de objetos y telescopía demuestra la capacidad del modelo para adaptarse a estos objetos complejos y como puede ofrecer resultados aceptables en apenas dos horas de tiempo de calculo.

Tabla 10.8:  $P \geq 90\%$  ,  $Z = 1.645$ 

	GAP(SC)	GAP (CUBS)
$\mu =$	7.368888889	7.028148148
$\sigma =$	8.45468427	7.850791257
GAP Esperado (X)		

También se observa que si tiene información de la solución del problema, como una ubicación específica de algún objeto esto puede ser aprovechado para reducir los tiempos de calculo e incluso mejorar la solución.

## CAPÍTULO 11

# EXPERIMENTACIÓN (OBJETOS L)

---

En esta sección se describen los resultados de la experimentación con objetos L, en contenedores rectangulares, contenedores L, para empaquetamiento de objetos idénticos, para distintos tipos, con telescopía y sin telescopía.

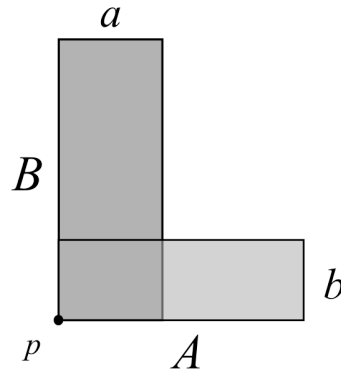
### 11.1 OBJETIVOS

El objetivo de esta experimentación es probar la calidad de las soluciones para el empaquetamiento de objetos L (estos objetos pueden tener aplicaciones por ejemplo en la consecuencia de actividades [18] que se menciono en el capitulo 3), también para probar el modelo en instancias que usen un contenedor distinto al rectangular.

### 11.2 DEFINICIÓN DE OBJETO L

El objeto L es un objeto compuesto por dos rectángulos de dimensiones  $Axb$  y  $Bxa$ , para el diseño de un objeto L es necesario definir tres parámetros (el radio  $R$ , el coeficiente  $\alpha$  y el espesor  $th$ ), los métodos para establecer si dos objetos de este tipo se sobreponen se explica en el capitulo 5, La fig. 11.1 muestra las partes en que se compone este objeto.

Figura 11.1: Inst. 1,18



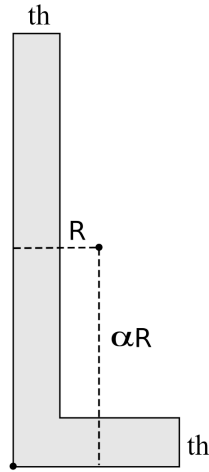
### 11.3 EXPERIMENTACIÓN (UN SOLO TIPO)

#### 11.3.1 DISEÑO DE EXPERIMENTOS

Se utilizaron las 6 primeras instancias usadas por usadas por Galiev y Lisafina [?], estas instancias consideran un solo tipo objeto L. para el primer grupo de instancias (grupo 1) se consideró una L donde se tiene que  $a = b$  (base y altura) y se denomina como espesor  $th$  del objeto, se define  $R : \alpha R$  como la relación entre base y la altura (ver fig. 11.2) donde  $R$  es el radio del objeto, para el primer grupo se considero la relación R:R que significa base y altura iguales y para el segundo grupo se definió a la altura como el doble de la base o R:2R, el espesor  $th$  se estableció como una fracción del radio, siendo este  $th = 0.3R$  para ambos grupos de instancias.

Para el diseño de las mallas, se consideró una malla uniforme cuadrada, (distancia entre puntos contiguos en dirección x y en dirección y es la misma), con el objetivo de obtener buenos resultados se considero la utilización del espesor del objeto L para estimar la cantidad puntos  $M$  (puntos sobre eje  $x$ ) y  $N$  (puntos sobre eje  $y$ ) de la malla, el propósito de esto es que los objetos estuvieran lo más cercanos entre sí, se utilizó una fracción entera del espesor y se estableció entonces que la distancia  $th(\text{grid})$  debería ser igual o mayor a  $\delta \approx th/2$  del objeto, las características del diseño resultante de estas mallas se presenta en la tabla 11.1.

Figura 11.2: Representación de la relación entre base y altura



Para el valor objetivo  $z$  se estableció la suma de pesos  $W$  de los objetos de la

Tabla 11.1: Características de instancias ( $R : R, R : 2R$ )

ID	Radio	Espesor	Contenedor		Malla				
	$th : 0.3R$		W	L	M	N	n	$th/2$	$\delta$
1	0.50000	0.150000	3	6	41	81	3321	0.075000	0.07500
2	0.62500	0.187500	3	6	33	65	2145	0.093750	0.09375
3	0.56250	0.168750	3	6	36	71	2556	0.084375	0.08571
4	0.37500	0.112500	3	6	54	107	5778	0.056250	0.05660
5	0.31250	0.093750	3	6	65	129	8385	0.046875	0.046875
6	0.43750	0.131250	3	6	36	71	2556	0.084375	0.08571

siguiente manera, al objeto de menor área se le asigna el menor peso, el peso  $W$  de este objeto tendría un valor igual a 1 (establecemos  $W_k$  en función del área menor tamaño), el peso  $W$  de los demás puede calcularse con la siguiente formula:

$$W_k = Area_k / (\min(Area_k)) \quad (11.1)$$

El objetivo de estas instancias con un solo tipo de objeto se interpreta como la maximizan del área ocupada por los objetos entonces el área ocupada por los objetos



puede calcularse como:

$$Area_{total} = z * \min(Area_i) \quad (11.2)$$

Se probaron las instancias, con el modelo matemático standard ST y con una desigualdad valida, hasta alcanzar optimalidad ( $GAP = 0$ ) o alcanzar los 1800 segundos de tiempo de computo, se obtuvieron soluciones tanto para el problema entero como para el problema relajado (relajación lineal).

### 11.3.2 RESULTADOS DE EXPERIMENTACIÓN

La tabla 11.2 muestra un resumen de los resultados obtenidos por la experimentación, la primera columna identifica la instancia, la segunda el radio del objeto para esta instancia, posteriormente se tienen diez columnas separadas en dos grupos, el primer grupo de cinco columnas se refieren a los resultados obtenidos para instancias del tipo R:R, la primera de esta grupo de columnas presenta la mejor solución obtenida  $Z$ , la segunda el resultado de la relajación lineal ( $LP$ ), la tercera cuando se agrego la desigualdad valida ( $LP + CUB$ ) , la cuarta es el tiempo en segundos para alcanzar la solución entera optima para el caso sin desigualdades validas, y la ultima del grupo es el tiempo para alcanzar la solución optima cuando se agrega la desigualdad valida, el segundo grupo tiene las mismas indicaciones que el anterior pero para instancias con la relación R:2R, los resultados muestran una mejora en los tiempos de calculo cuando se agregan desigualdades validas, se muestran dos imágenes (figs. 11.3, 11.4) de las soluciones obtenidas.

## 11.4 EXPERIMENTACIÓN (DIFERENTES TIPOS)

### 11.4.1 DISEÑO DE EXPERIMENTACIÓN

Se diseñaron dos instancias básicas y se utilizaron dos tipos de objetos a empaquetar en un contenedor cuadrado de 30x30, estableciendo el parámetro de espesor como  $th = 1 * R$ , la malla fue diseñada de la misma forma que se hizo con las

Tabla 11.2: Resultados experimentación (Para un tipo)

ID	R	INST.(R:R)					INST. (R:2R)				
		(z)	LP	LP+C1	SC	CUB	(z)	LP	LP+CUB	SC	C1
1	0.5	37	1163	135.5	16	11	22	1029	117.2	25	14
2	0.625	20	680.7	107.7	4	3	10	580.1	79.08	4	4
3	0.5625	25	851.7	127.5	8	5	14	739.8	92.45	8	8
4	0.375	75	2223	271.6	150	150	42	2036	195.6	610	330
5	0.3125	116	3379	384.9	1867	620	71	3144	275.4	3581	1930
6	0.4375	48	1537	201.5	76	76	29	1383	146.5	73	55

Figura 11.3: Inst. 5 (R:R)

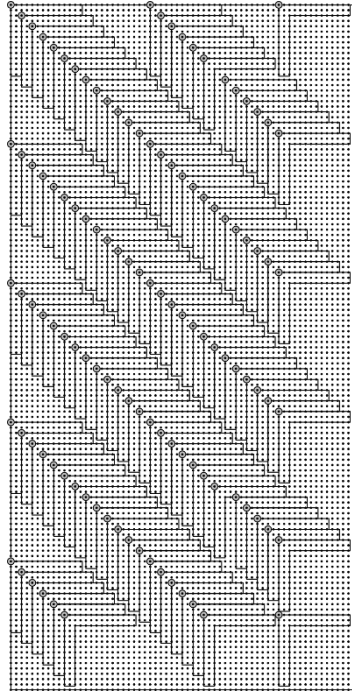
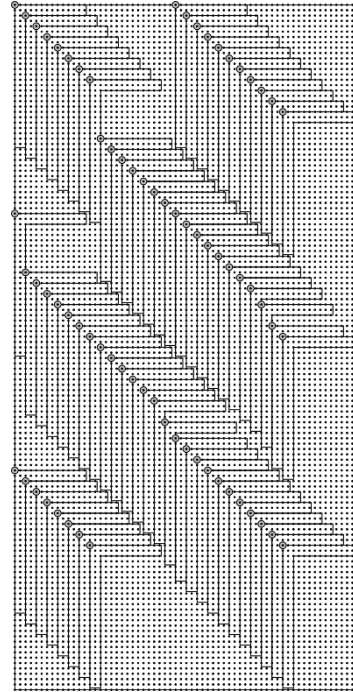


Figura 11.4: Inst. 5 (R:2R)



instancias anteriores de un solo tipo de objeto, pero como son dos objetos con dos espesores distintos, se selecciono el espesor más pequeño por ser mas critico a  $\delta \approx th$ , la tabla 11.3 nos muestra las características de las mallas para estas instancias.

Para la experimentación las dos instancias se probaron con relación R:R y con relación R:2R, en total 4 instancias de prueba finales, cada una de estas 4 instancias fue probada con el modelo estándar en el caso sin telescopía y en el caso con te-

lescopia. Se agregó una cota mínima( $min_1$  y  $min_2$ ) para cada tipo de objetos, para evitar soluciones triviales (que se empaquete un solo tipo de objeto), la cota máxima se dejó libre, se estableció un tiempo máximo de solución de 1800 segs. de tiempo de computo o alcanzar optimalidad(GAP=0).

Tabla 11.3: Instancias (diferentes objetos L)

ID	Radios(k)	Espesores	Cotas	Malla		Grid			
	R1,R2	th1,th2	min1,min2	W	L	M	N	n	$\delta$
1 (R:R)	0.6,6.3	0.6,6.3	1,2	30	30	51	51	2601	0.6
2 (R:2:R)	0.6,6.3	0.6,6.3	1,2	30	30	51	51	2601	0.6
3 (R:R)	1,5.3	1,5.3	1,2	30	30	31	31	961	1
4 (R:2R)	1,5.3	1,5.3	1,2	30	30	31	31	961	1

La experimentación para objetos sin telescopía se realizó en dos partes, en la primera se calculó la relajación lineal para los modelos sin desigualdades válidas y para los modelos con desigualdades válidas, en la segunda parte se calculó la solución entera con y sin desigualdades válidas, en la experimentación con telescopía se calculó la solución entera con el modelo estándar para telescopía y sin ninguna restricción adicional.

### 11.4.2 RESULTADOS

La tabla 11.4 muestra los resultados para las experimentaciones sin telescopía, en la primera columna (ID) se identifica la instancia, en la segunda ( $z$ ) se da la mejor solución entera obtenida, las siguientes 4 muestran la cota lineal para cada modelo, las siguientes dos columnas muestran la cantidad de objetos calculada de cada tipo  $k$ , las últimas muestran los tiempos para alcanzar al óptimo de cada modelo, un asterisco indica que se sobrepasó el tiempo límite en ese caso se muestra entre paréntesis la solución entera alcanzada y el GAP.

La tabla ?? muestra los resultados para el caso de las instancias probadas con telescopía, la primer columna identifica la instancia (ID) , las dos siguientes indican la cantidad de objetos por tipo alcanzados , las ultimas dos el tiempo y el GAP de la solución entera, asterisco indica que se alcanzo el limite de tiempo, la fig. 11.5 muestra la solución para la instancia 3 con telescopía.

Tabla 11.4: Resultados para difs. objs. L (sin telescopía)

ID.	$z$	Cotas (LP)				Obj. (k)		Tiempos(s.)			
		SC	C1	C2	CC	1	2	SC	C1	C2	CC
1 (R:R)	750	78384	5980	5762	5762	309	4	*(750, 12 %)	*(735, 28 %)	*(733, 28 %)	*(728, 39 %)
2 (R:2R)	447.5	51404	4931	4747	4747	227	2	530	380	440	380
3 (R:R)	271.2	8458	1352	1281	1281	215	2	17	19	26	26
4 (R:2R)	147.2	6221	1107	1042	1042	91	2	16	18	17	16

Tabla 11.5: Resultados para difs. objs. L (con telescopía)

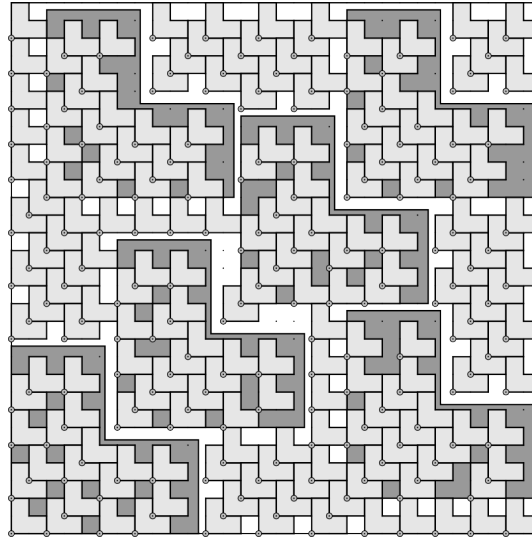
ID	Objs. (k)		Sol. entera
	1	2	Tiempo(s.), GAP( %)
1 (R:R)	681	4	*,7.8
2 (R:2R)	400	2	*,6
3 (R:R)	197	6	*,5.7
4 (R:2R)	114	3	440,0

## 11.5 EXPERIMENTACIÓN (DIFERENTES ORIENTACIONES)

## 11.6 DISEÑO DE EXPERIMENTOS

En esta experimentación se consideró que además del tipo de objeto (cambio en la escala), otra característica es la orientación, definiendo para un objeto L, cuatro orientaciones posibles (un tipo  $k$  por orientación), que son resultantes reflejar

Figura 11.5: 3,CT



el objeto vertical y horizontalmente (ver fig. 11.6), las propiedades del contenedor, las características de los objetos a empacar y las características de la malla para la generación de las instancias están en la tabla ??.

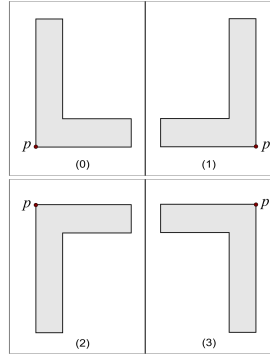
Tabla 11.6: Características de instancias básicas

ID	Radio ( $R_k$ )	Espesor	Cotas	Contenedor		
	$R_1, R_2$	$th_1, th_2$	$min_1, min_2$	W,L	M,N	n
A	0.6,6.3	0.6,6.3	1,1	30,30	51,51	2601
B	1,5.3	1,5.3	1,1	30,30	31,31	961

En la tabla 11.6 la primer columna es el identificador de la instancia, las dos siguientes se refieren a los radios (o tipos  $k$ ) del objeto, cuarta y quinta es la cantidad mínima de objetos que se piden para cada tipo, la sexta y séptima son las características del contenedor rectangular y las últimas tres refieren a las características de la malla

Para el diseño de experimentos se consideraron solo dos tipos de objetos, en

Figura 11.6: Ejemplo de malla



este caso es el mismo objeto pero con dos diferentes orientaciones , se consideraron dos variantes para cada una de las instancias básicas A y B al considerar diferentes relaciones para los radios de los objetos, resultando cuatro instancias finales para la experimentación

El diseño detallado de la experimentación, las propiedades para cada tipo de objeto están en la tabla 11.7, el vector de pesos  $W_k$  esta en función del área del objeto de menor tamaño, tal como se realizó en la sección anterior de este capítulo.

En resumen para el diseño de experimentos, de las instancias básicas se usaron dos variantes con relaciones entre radios (R:R) y (R:2R), y se probó en estas cuatro instancias, el modelo estándar sin desigualdades válidas (SC) y sus tres variantes , con desigualdad válida 1 (C1) , con desigualdad válida 2 (C2) y con ambas (CC), como primer parte de la experimentación se obtuvo primeramente la relajación lineal de las instancias sin y con desigualdades, la segunda parte fue obtener la solución entera, la tercer parte de la experimentación fue probar las instancias con telescopía, usando solo el modelo estándar para telescopía

El solver utilizado fue CPLEX v12.6, y el hardware empleado fue una computadora de escritorio AMD-FX con 4ghz , 32 gb de RAM y 8 núcleos, el tiempo máximo establecido para alcanzar optimalidad (GAP=0) fue de 7200 segundos o dos horas (en telescopía también se probó 8 horas).

Tabla 11.7: Diseño de experimentación (Objetos-L)

ID	DIR	$k$	Radio( $k$ )	a1	b2	th1 (b1)	th2 (a2)	min	Área ( $A_k$ )	$W_k$
1 (R:R)	0*	1	0.6	1.2	1.2	0.6	0.6	1	1.08	1
	1	2	0.6	1.2	1.2	0.6	0.6	1	1.08	1
	0	3	6.3	12.6	12.6	6.3	6.3	1	119.07	110.25
	1	4	6.3	12.6	12.6	6.3	6.3	1	119.07	110.25
2(R:2R)	0*	1	0.6	1.2	2.4	0.6	0.6	1	1.8	1
	1	2	0.6	1.2	2.4	0.6	0.6	1	1.8	1
	0	3	6.3	12.6	25.2	6.3	6.3	1	198.45	110.25
	1	4	6.3	12.6	25.2	6.3	6.3	1	198.45	110.25
3 (R:R)	0*	1	1	2	2	1	1	1	3	1
	1	2	1	2	2	1	1	1	3	1
	0	3	5.3	10.6	10.6	5.3	5.3	1	84.27	28.09
	1	4	5.3	10.6	10.6	5.3	5.3	1	84.27	28.09
4 (R:2R)	0*	1	0.6	2	4	1	1	1	5	1
	1	2	0.6	2	4	1	1	1	5	1
	0	3	6.3	10.6	21.2	5.3	5.3	1	140.45	28.09
	1	4	6.3	10.6	21.2	5.3	5.3	1	140.45	28.09

### 11.6.1 RESULTADOS

Las cotas de la primer parte de la experimentación (relajación lineal) están en la Tabla ??, donde la segunda columna indica la dimensión de la malla, la tercera la mejor cota obtenida  $z_{LP}$ , las siguientes cuatro muestran las cotas  $z_{LP}$  calculadas para cada tipo de modelo y las ultimas 4 columnas el tiempo (en segundos) que se tomó el solver en calcular esta cota.

La tabla ?? muestra los resultados de toda la experimentación, el modelo estándar y de los modelos con desigualdades validas, para un tiempo de solución de 7200 segundos, la primer columna indica la instancia, la segunda columna proporciona la mejor cota entera obtenida, las siguientes 4 columnas la cota para cada modelo (asterisco indica la mejor cota), las ultimas 4 proporcionan el GAP obtenido.

INST	$\min(z_{LP})$	SC	C1	C2	CC	SC	C1	C2	CC
1 (R:R)	9267.97	155443	9361.65	9608.51	9267.97*	374	417	505	493
1 (R:2R)	8081.63	100665	8164.54	8156.76	8081.63*	384	700	351	698
2 (R:R)	2106.47	16390.7	2127.79	2248.12	2106.47*	15	17	20	22
2 (R:2R)	1825.85	12062.8	1850.62	1842.37	1825.85*	16	19	17	23

Tabla 11.8: Experimentación difs. orientaciones, relajación lineal

INST	$\max(z)$	Sol. entera				GAP( %)			
		SC	C1	C2	CC	SC	C1	C2	CC
1 (R:R)	747.75 (807.57)	747.75*	670.75	670.75	670.75	37.06	266.58	253.76	292.56
1 (R:2R)	433.689(780.64)	426.689	433.689*	432.699	431.689	19.46	17.63	18.99	19.11
2 (R:R)	281.18 (843.54)	281.18*	280.18	281.18*	281.18*	1.16	1.54	1.16	1.24
2 (R:2R)	150.18 (750.9)	149.18	150.18*	149.18	150.16	3.8	3.03	3.96	3.08

Tabla 11.9: Experimentación (IP) difs. orientaciones

La tercera parte de la experimentación, es el caso de telescopía, los resultados se muestran en las tablas ?? y ?? la columna 3 indica la solución alcanzada, la cuarta el porcentaje de GAP al término del cálculo, y las últimas columnas muestran la cantidad de objetos calculados por cada tipo y orientación ( $k, DIR$ ).

ID.	$z$	GAP( %)	N. objs.			
			(1,0)	(1,1)	(2,0)	(2,1)
1 (R:R)	1026	2727.36	584	1	3	1
1 (R:2R)	583.689	15.428	206	160	1	1
2 (R:R)	393.54	8.438	110	115	3	3
2 (R:2R)	205.2	12.089	58	63	2	1

Tabla 11.10: Experimentación difs. orientaciones (telescopía 2 hrs.)

Como ejemplo final se probó una instancia con dos objetos, pero uno de estos



ID.	Z	GAP(%)	N. objs.			
			(1,0)	(1,1)	(2,0)	(2,1)
1 (R:R)	1146,	8.127	365	340	3	1
2 (R:2R)	610.689	10.281	235	158	1	1
3 (R:R)	396.54	7.248	111	117	3	3
4 (R:2R)	206.27	11.239	69	53	2	1

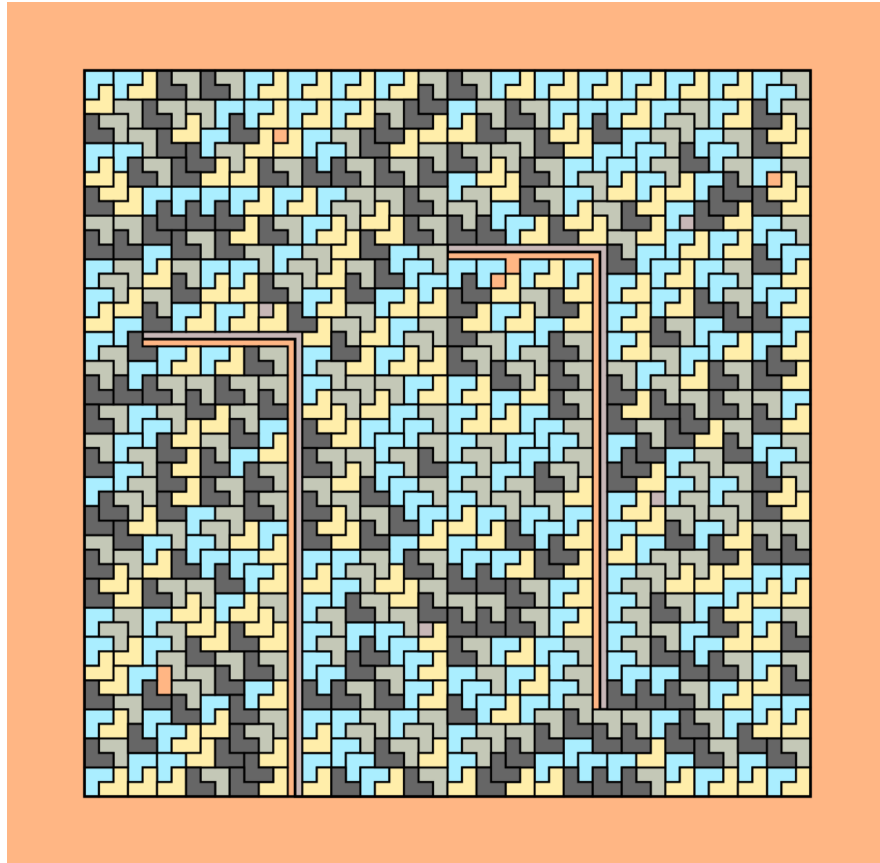
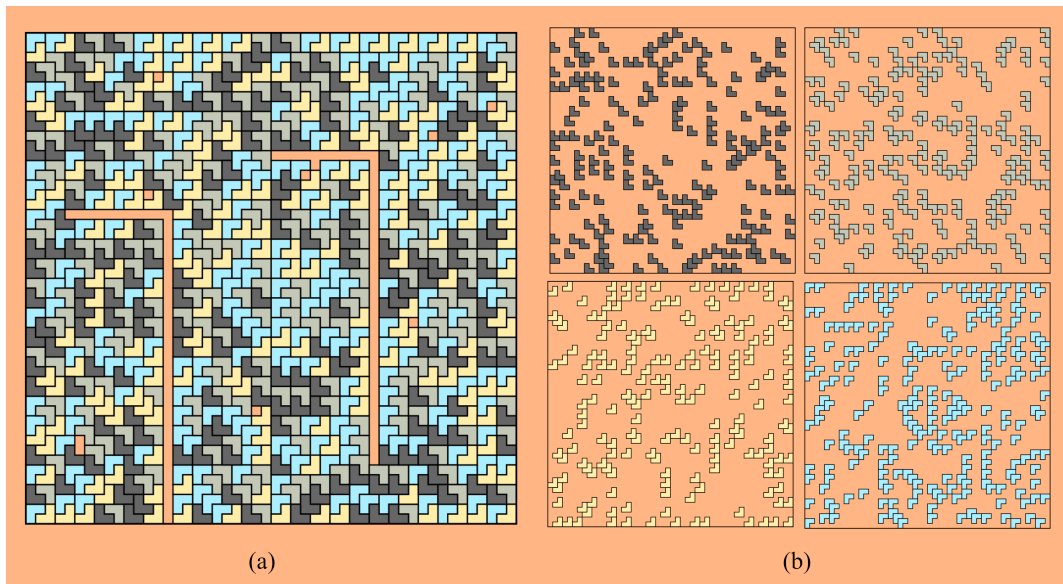
Tabla 11.11: Experimentación difs. orientaciones (telescopía 8 hrs.)

(objeto pequeño) con las 4 orientaciones posibles , se muestran las características de esta instancia en la tabla ??, para esta instancia se usaron tiempos de 7200 seg de tiempo máximo de computo y la misma configuración de hardware.

ID	DIR	$k$	Radio	a1	b2	th1(b1)	th2(a2)	min	Área( $A_k$ )	$W_k$
5	0*	1	0.6	1.2	1.2	0.6	0.6	1	1.08	1
	1	2	0.6	1.2	1.2	0.6	0.6	1	1.08	1
	2	3	0.6	1.2	1.2	0.6	0.6	1	1.08	1
	3	4	0.6	1.2	1.2	0.6	0.6	1	1.08	1
	0	5	6.3	12.6	25.2	6.3	6.3	1	119.07	110.25

Tabla 11.12: Instancias difs. orientaciones (ejem. 4 Orientaciones)

La cota alcanzada en esta instancia fue de  $z = 583.689$  con un gap de 15.428% , en la fig. 11.7 se muestra la solución obtenida para esta instancia en color , y en en la fig. 11.8 se muestran los objetos pequeños individualmente (a) y sumados (b), se puede observar en (b) como los objetos pequeños van agrupándose formando un objeto L mas grande, las demás soluciones pueden encontrarse en el apéndice D.

Figura 11.7: Solución , empaquetamiento con 4 direcciones (para  $k=1..5$ )Figura 11.8: Solución , empaquetamiento con 4 direcciones (para  $k=1,2,3,4$ )

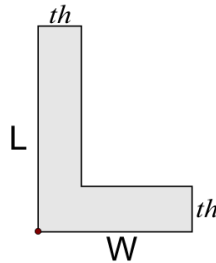
## 11.7 EXPERIMENTACIÓN (CONTENEDOR L)

Se realizaron dos ejemplos ilustrativos para el empaquetamiento en contenedores con forma de L (ver fig. 11.9 ),para el diseño se utilizo la instancia básica  $B$  de la experimentación con diferentes orientaciones, con dos variantes para la relación entre radios de los objetos (R:R y R:2R) , cambiando el contenedor cuadrado a contenedor L estableciendo el parámetro  $th = 12$  del contenedor L , y el vector de pesos  $W_k$  esta en función del área del objeto de menor tamaño, la técnica para utilizar estos contenedores puede encontrarse en el capitulo 7, las características para estas dos instancias se encuentran la tabla ??, se estableció un tiempo máximo de solución de 1800 segs. o alcanzar la optimalidad(GAP=0).

ID	Radio ( $R_k$ )	Espesor	Cotas	Contenedor	Malla
	$R_1, R_2$	$th_1, th_2$	$min_1, min_2$	W, L , th	M,N
1 (R:R)	1,5.3	1,5.3	1,2	30,30,12	31,31
2 (R:2R)	1,5.3	1,5.3	1,2	30,30,12	31,31

Tabla 11.13: Características instancias (Contenedor L)

Figura 11.9: Contenedor L



Para la experimentación las dos instancias se resolvieron con y sin telescopía, los puntos finales del grid se calcularon durante el preproceso de la instancia, durante la fase de construcción del grid ,para estas experimentaciones solo se utilizó el modelo standard sin desigualdades validas, el hardware utilizado para todas las

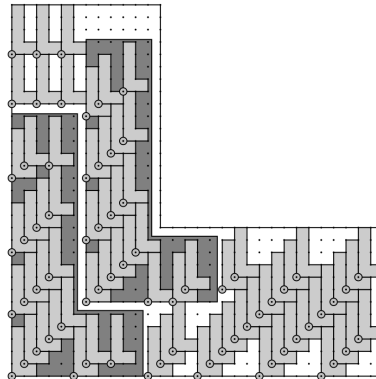
experimentaciones, fue una CPU genérica, con cpu Intel I7 , con 8 hilos de ejecución, 2.96 ghz y 6gb RAM , el solver utilizado fue cplex versión 12.6 (64 bits), el lenguaje de programación y modelado fue Visual C++, utilizando las librerías de cplex.

Los resultados de la experimentación con el contenedor L, se muestran en 11.14, la primer columna identifica la instancia y si es con telescopía (tel), la segunda columna la cantidad de nodos  $n$  final en el contenedor, la tercera la cantidad de objetos para cada tipo, la cuarta el tiempo transcurrido ( $t_{\downarrow 1}$  indica que el tiempo fue menor a 1 segundo) y la ultima el % GAP de la solución, la fig. 11.10 muestra la solución para la instancia 2 con telescopía (consultar apéndice D para el resto de las soluciones).

Tabla 11.14: Características de instancias

ID	n	N. Objs.	Tiempo(s)	GAP( %)
	(final)	1,2		
1	637	108,2	1	0
1(tel)	637	120,4	1	0
2	637	33,2	$t_{\downarrow 1}$	0
2(tel)	637	71,2	$t_{\downarrow 1}$	0

Figura 11.10: Inst. 2



## 11.8 CONCLUSIONES

Los resultados experimentales para el objeto L ofrecen buenos resultados en poco tiempo, incluso en las instancias mas grandes, lo que nos dice que el modelo trabaja mejor cuando los objetos no tienen inclinación o tienen curvas como en el caso del circulo, ademas de que en este tipo de objetos una buena estimación para el diseño de la malla puede ser calculada con un método sencillo como el que se muestra en este capitulo a diferencia de objetos como el circulo donde una malla adecuada no es de tan fácil estimación.

## CAPÍTULO 12

# HEURÍSTICA (BASADA EN LP)

---

### 12.1 INTRODUCCIÓN

En esta sección se propone una heurística básica basada en la relajación lineal del modelo entero de esta investigación que puede utilizarse como una aproximación o una solución buena inicial para otros métodos mas sofisticados en el calculo de la solución optima de problemas de empaquetamiento, se comprueba la calidad de sus soluciones con una experimentación en objetos como círculos y octágonos (por publicar [40]).

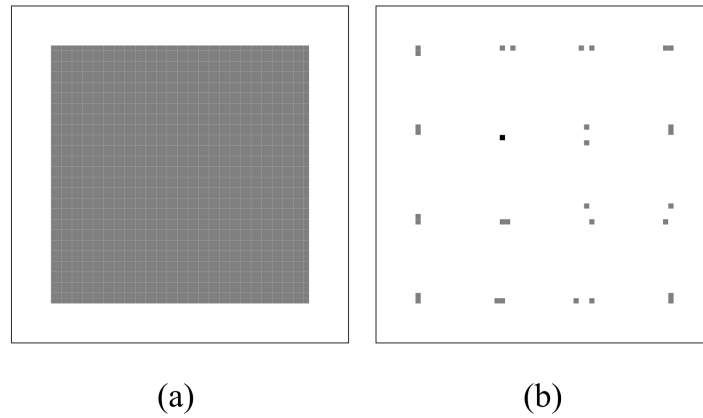
### 12.2 DISEÑO DE HEURÍSTICA

La relajación lineal que resulta de la solución de el modelo sin desigualdades validas ofrecen una cota pobre comparada con el objetivo optimo, esto es debido a que estas soluciones  $z_{SC}^{LP}$  que ofrece este modelo relajado son triviales ya que los valores que toman las variables enteras convertidas a continuas son  $x_i^k = 0.5$  por lo que el resultado de estas puede considerarse pobre y poco útil (trivial), al introducir las desigualdades validas asemejan el problema de packing a un problema de cubrimiento [49] y la cota resultante  $z_{CC}^{LP}$  puede ser de mejor calidad  $z^* \leq LP_{CC} \leq LP_{SC}$ .

Ademas de ofrecer una mejor cota, el agregar las desigualdades validas, puede mejorar la estructura de la solución, en la figura 12.1 podemos ver dos ejemplos de soluciones relajadas en la imagen (a) se presenta la solución sin cubrimientos en una

escala de grises donde cada nodo representa un color gris de acuerdo a su valor (0 representa el color blanco, 1 el color negro) , un color uniforme indica que todas las variables relajadas tuvieron el mismo valor (en esta caso  $x_i^k = 0,5$ ), en la imagen (b) se presenta la solución con desigualdades validas en esta solución no todos los valores que tomaron las variables relajadas fueron iguales.

Figura 12.1: Soluciones - relajación lineal



Los valores que toman las variables relajadas  $x_i^k$  resultan ser interesantes y no triviales como en la solución sin cubrimientos, en esta heurística partimos de la premisa de que estos valores de  $x_i^k$  pueden tener relación con la solución óptima, podemos suponer que una  $x_i^k$  continua próxima a cero, o igual a cero posiblemente indica que en la solución óptima del problema entero esta sea realmente igual a cero y los valores próximos a 1 indiquen una mayor posibilidad de que puedan serlo en la solución óptima. Así que estos valores continuos de  $x_i^k$  podemos emplearlos en el diseño de la heurística, esta heurística podría eliminar o ignorar puntos de la malla, ya que cada punto esta relacionado con una variable binaria, esto significa un menor numero de variables y por lo tanto un modelo entero de menor tamaño y posiblemente se pueda tener una reducción en los tiempos de calculo para encontrar el optimo.

Podemos diseñar por ejemplo una heurística que elimine las variables relacionadas con los puntos que tengan una cierta proximidad al valor cero y una forma

de eliminar o ignorar esta variable puede lograrse igualándola a cero ( $x_i = 0$ ) en el modelo.

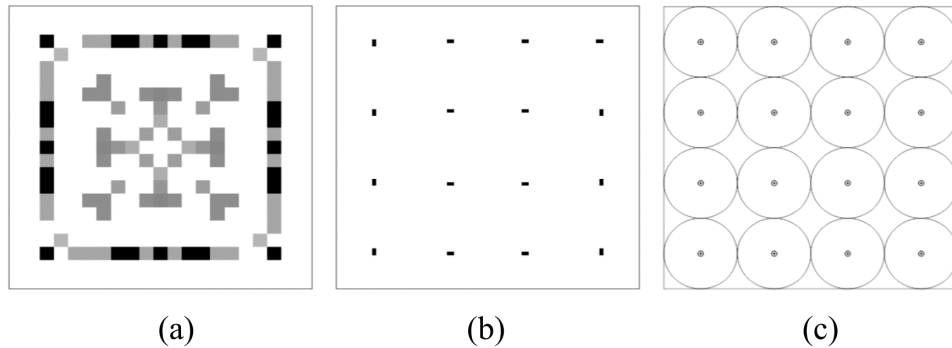
Pero la solución del problema relajado puede todavía suministrarnos mayores datos que solo los valores de las variables, la información que pueden darnos las variables relajadas es importante pero pueden llegar a descartarse nodos que podrían estar en la solución optima, pero si conservamos ademas los costos reducidos de la solución, estos también pueden ofrecernos información acerca de las variables.

Una variable continua que toma el valor de cero, puede tener todavía un costo reducido asignado, entonces las variables con los menores costos reducidos son las candidatas a eliminarse del problema pero las que tienen los mayores costos reducidos (mas cercanos a cero) aun podrían no ser eliminadas, esto significa que usar los costos reducidos amplia nuestro rango de selección de variables a fijar como cero.

Si ademas incrementamos el numero de nodos de la malla cuidando que este incremento no afecte la posición de los nodos originales existe la posibilidad de reducir aun mas el tamaño del problema, al hacer mallas mas finas pueden conseguirse mejores cotas pero también mejores estructuras de solución del problema, en la figura 12.2 pueden verse dos soluciones relajadas (a) y (b) cada una con una distinta refinación de malla, la mas fina (b) presenta una estructura similar a la solución optima como se puede ver en la imagen (c).

Se presentan a continuación dos algoritmos, el algoritmo con la heurística que

Figura 12.2: Solución para relajación lineal , refinación de malla



utiliza la malla original del problema y el algoritmo que utiliza la malla refinada.



---

**ALGORITMO LPO-MALLA-ORIGINAL**


---

ENTRADA: Datos de instancia

- Característica contenedor
- Características de malla  $G$
- Características objetos a empacar

---

SALIDA: Solución factible de la instancia

- Asignación de círculos en malla, cumpliendo restricciones

---

**INICIO**

- 1: Construir modelo
- 2: Resolver instancia relajada
- 3: Extraer costos reducidos  $CR$  de la solución de modelo  
 $CR = \{i \in G : d_i \leq 0\}$
- 4: Escalar costos reducidos  $\bar{d}_i \in \{0, 1\}$  y  $\bar{d}_i = |d_i| / (\max_{i \in G} |d_i|)$
- 5: De acuerdo a parámetro  $\gamma$ , se define un conjunto de costos reducidos negativos suficiente  $CR_\gamma$  tal que:  
 $CR_\gamma = \{i \in CR : \bar{d}_i \geq \gamma\}$
- 6: Resolver instancia entera usando malla  $G$  pero fijando  $x_i = 0$  para  $i \in CR_\gamma \cap G$

**FIN**


---

El diseño de esta heurística inicial (LPO-MALLA-ORIGINAL), esta basado en seleccionar las variables a eliminar de acuerdo a su costo reducido, lo que hace la heurística es básicamente seleccionar los nodos mas negativos de acuerdo a un parámetro  $\gamma$  que define un rango de valores de variables a fijar ( $x_i = 0$ ).

En la heurística refinada (LP-MALLA-REFINADA), la malla original se hace mas fina introduciendo mas nodos, esta heurística requiere conocer que nodos de la malla refinada corresponderían a los de la original, la relajación lineal se hace sobre la malla refinada y se sacan los costos reducidos de esta para poder fijar las variables

$(x_i = 0)$  dentro de la malla original y que estén dentro del rango definido por el parámetro  $\gamma$ .

---

**ALGORITMO LP-MALLA-REFINADA**

---

ENTRADA: Datos de instancia

- Característica contenedor
  - Características de malla original
  - Parámetros de refinamiento de malla  $rf$
  - Características objetos a empacar
- 

SALIDA: Solución factible de la instancia

- Asignación de círculos en contenedor, cumpliendo restricciones
- 

INICIO

- 1: Construir modelo  $RG$  con malla refinada según parámetro  $rf$  tal que  $G \subseteq RG$
- 2: Relajar variables binarias de modelo
- 3: Resolver modelo
- 4: Extraer costos reducidos  $CR$  de la solución de modelo  
 $CR = \{i \in RG : d_i \leq 0\}$
- 5: Escalar costos reducidos  $\bar{d}_i \in \{0, 1\}$  y  $\bar{d}_i = |d_i| / (\max_{i \in CR} d_i)$
- 6: De acuerdo a parámetro  $\gamma$ , se define un conjunto de costos reducidos negativos suficiente tal que:  
 $CR_\gamma = \{i \in CR : \bar{d}_i \geq \gamma\}$
- 6: Resolver instancia entera usando malla  $G$  pero fijando  $x_i = 0$  para  $i \in CR_\gamma \cap G$

FIN

---

## 12.3 EXPERIMENTACIÓN

### 12.3.1 OBJETIVO

El objetivo de la experimentación es comprobar el rendimiento de la heurística comparándolo con las soluciones que ya se tienen estimadas sin usar la heurística.

### 12.3.2 DISEÑO DE EXPERIMENTACIÓN

Para el diseño de la experimentación se utilizaron las 9 instancias del capítulo 8, empacando objetos circulares y de forma octagonal, se probaron la malla original y dos mallas aumentadas que están en la tabla ?? , y se aplicó la heurística (LP-MALLA REFINADA) para reducir el tamaño del modelo y resolver las instancias con el modelo de menor tamaño.

ID.	$k = 0$			$k = 1$			$k = 2$		
	$M_0$	$N_0$	$n_0$	$M_1$	$N_1$	$n_1$	$M_2$	$N_2$	$n_2$
1	17	41	697	33	81	2673	49	121	8017
2	23	61	1403	45	121	5445	67	181	16333
3	31	79	2449	61	157	9577	91	235	28729
4	25	57	1425	49	113	5537	73	169	16609
5	31	69	2139	61	137	8357	91	205	25069
6	39	94	3666	77	187	14399	115	280	43195
7	41	89	3649	81	177	14337	121	265	43009
8	36	80	2880	71	159	11289	106	238	33865
9	57	121	6897	113	241	27233	169	361	81697

Las mallas aumentadas se calcularon con las siguientes formulas:

$$M_k = M + k(M - 1), N_k = N + k(N - 1), n_k = M_k * N_k \quad (12.1)$$

Donde  $M$  y  $N$  corresponden a la cantidad de puntos sobre el eje  $x$  y  $y$  respectivamente y  $n$  es la cantidad total de puntos en la malla, el subíndice  $k$  indica el nivel

de malla aumentada, cuando  $k = 0$  corresponde a la malla original, y cuando  $k = 1$  agrega un punto entre dos nodos, cuando  $k = 2$  agrega dos puntos entre dos nodos y así sucesivamente(fig 12.3).

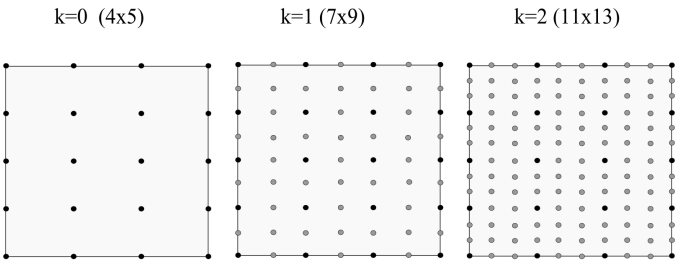


Figura 12.3: Diferentes mallas que incluyen la original  $k = 0$

Para calcular el parámetro  $\gamma$  de la heurística que es utilizado para estimar el rango de valores de costos reducidos a considerar, se tomo en cuenta los valores de soluciones optimas o suboptima de las instancias que se tenían y se hizo un análisis de estas soluciones que esta en la tabla ??.

Tabla 12.1: Estimación parámetro  $\gamma$ , con soluciones previas para círculos

Instancia	k	CR (Relajación lineal)		CR (Solución previa)		CR (Escalados 0-1)	
		min	max	min	max	min	max
1	0	-2	0	0	0	1	1
2	0	-1.1	0	0	0	1	1
3	0	-0.99	0	0	0	1	1
4	0	-0.74	0	-0.04	0	0.95	1
5	0	-0.69	0	-0.15	0	0.82	1
6	0	-0.82	0	-0.33	0	0.6	1
7	0	-0.97	0	-0.08	0	0.92	1
8	0	-0.84	0	-0.11	0	0.87	1
9	0	-0.43	0	-0.02	0	0.95	1

En este estudio se trata de establecer el rango, el valor mínimo y máximo de

costo para que la variable binaria debe tener para que esta variable no sea considerada igual a cero.

En la tabla ?? , las primeras dos columnas son el numero de instancia y el valor  $k$  de la malla que en este caso es 0 indicando que se hizo con la malla original, las siguientes dos columnas muestran los valores máximos y mínimos de los costos reducidos obtenidos por la relajación lineal, las siguientes dos columnas muestran el rango de costo reducido relacionado con la solución que se tiene previamente (obteniendo solo los costos reducidos donde  $x_i = 1$  en esta solución), se puede observar que no siempre fue cero su valor de costo reducido pero estuvo próximo a el, las siguientes dos columnas muestran el valor escalado de 0 a 1 de los costos reducidos, con estos valores, el promedio del costo reducido mínimo escalado de la tabla ?? fue de 0.90 %, por lo que el parámetro para definir el rango para la heurística fue definido como 0.90 ( $\gamma = 0.9$ ).

Si no se tienen soluciones optimas, pudieran emplearse soluciones cercanas al optimo o al menos soluciones consideradas como buenas o también pudiera definirse este parámetro a prueba y error, probando diferentes valores y revisando su solución.

### 12.3.3 RESULTADOS DE EXPERIMENTACIÓN CON CÍRCULOS

La primer parte de la experimentación comparo las cotas obtenidas para el empaquetamiento de círculos con el modelo entero y con la heurística, en las instancias mas densas se eligió sustituir la restricción de solapamiento por las desigualdades validas para reducir el tamaño del problema relajado.

, Se muestran los resultados de la heurística para tres niveles de mallado , siendo la primera la malla original de tamaño  $n_\alpha$  y las otras dos las mallas aumentadas indicadas como  $n_{\alpha/2}$  y  $n_{\alpha/3}$  , los resultados de esta experimentación se muestran en la tabla 12.2, las primeras tres columnas indican el radio, separación entre nodos y la cota entera alcanzada, las siguientes tres columnas, indican el tamaño de la malla ( $n_{alpha}$ ), cota lineal ( $Z_{LP}$ ) y tiempo de calculo(CPU) respectivamente para la malla

original  $n_\alpha$  , las siguientes tres indican lo mismo para el tamaño de malla ( $n_{alpha/2}$ ) , y las ultimas tres corresponden al tamaño de malla ( $n_{alpha/3}$ ).

La segunda parte de la experimentación fue aplicar la heurística usando la malla refinada  $n_{\alpha/2}$  , la tabla ?? muestra los resultados de la heurística.

Tabla 12.2: Relajaciones Lineales para distintas mallas

id	$R$	$\delta$	$z_I$	$n_\delta$	$z_LP$	CPU	$n_{\delta/2}$	$z_LP$	CPU	$n_{\delta/3}$	$z_LP$	CPU
1	0.5	0.125	18	697	19	0	2673	18.06	3	8017	18.14	23
2	0.625	0.078125	10	1403	10	1	5445	10	38	16333	10	390
3	0.5625	0.0625	13	2449	14.07	5	9577	13.96	130	28729	13.7	1500
4	0.375	0.09375	32	1425	36.33	0	5537	34.54	10	16609	34.75	88
5	0.3125	0.078125	45	2139	53.4	1	8357	50.76	23	25069	50.77	350
6	0.4375	0.546875	21	3666	23.86	5	14399	24.01	200	43195	24.19	3400
7	0.25	0.0625	74	3649	90.98	2	14337	85.76	180	43009	85.24	3100
8	0.275	0.06875	61	2880	72	2	11289	67.78	70	33865	67.52	1100
9	0.1875	0.046875	140	6897	152.9	35	27233	151.8	3401	81697	151.8	3591

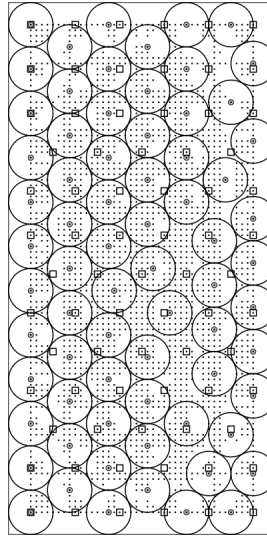
Tabla 12.3: Soluciones Heurística / Círculos  $n_{\alpha/2}$ 

Instancia	$n_\delta$	$Z_I$ "	CPU	$n_{reduced}$	$Z_H$	CPU
1	697	18	1	404	18	0
2	1403	10	41	718	10	4
3	2449	13	186	738	13	9
4	1425	32	4	790	32	1
5	2139	45	114	1372	45	28
6	3666	21	17654	1441	21	130
7	3649	74 (5 %)	> 12h.	2491	74	1400
8	2880	61	177	777	61	24
9	6897	140 (5 %)	> 12h.	558	139 (1.3 %)	3600

La heurística redujo el tamaño del modelo pudiendo reducir los tiempos de solución en la mayor parte de las instancias y alcanzar los mismos valores de cota logrados por el modelo entero, en la instancia 9 no logro alcanzarse esta cota, pero quedo con un valor muy próximo a esta, observad que la heurística tiene como limite de tiempo de calculo una hora para encontrar la mejor solución y el modelo entero se dejo correr doce horas.

Otro detalle de interes es que el uso de mallas mas densas no necesariamente mejora la solución del problema, soluciones para las otras mallas no muestran una mejoría notable, aumentar la densidad de la malla el tiempo puede incrementar mucho el tiempo en que se calcula la cota lineal. La fig. 12.4 muestra la solución para la instancia 7, el resto de las soluciones puede encontrarse en el apéndice D.

Figura 12.4: Inst. 7



#### 12.3.4 RESULTADOS DE EXPERIMENTACIÓN CON OCTÁGONOS

Los resultados para el caso de octágonos se presentan de la misma forma que para círculos en dos partes, en la primer parte se calculan las relajaciones lineales del problema para cada malla y en la segunda se muestran los resultados de aplicar la heurística.

Los resultados que muestra la tabla ??, indica que el uso de la heurística redujo

los tiempos de solución y alcanzo los mismos o similares valores de cota alcanzados por el modelo entero aunque no se haya alcanzado optimalidad en el modelo de tamaño reducido generado por la heurística, se alcanzaron las mismas soluciones, la fig. 12.5 muestra la solución de la instancia 7.

Tabla 12.4: Relajaciones lineales - octágono

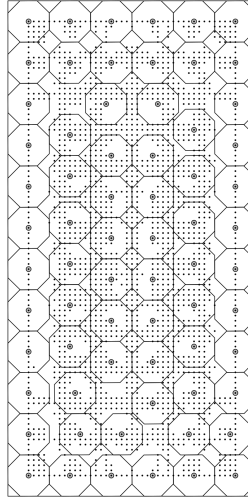
Instancia	r	$\delta$	$Z_I$	$n_{delta}$	$Z_{LP}$	CPU	$n_{delta/2}$	$Z_{LP}$	CPU	$n_{delta/3}$	$Z_{LP}$	CPU
1	0.5	0.125	18	697	19	0	2673	18	12	8017	18	20
2	0.625	0.078125	9	1403	10	1	5445	9.524	37	16333	9.571	450
3	0.5625	0.0625	12	2449	14.0743	3	9577	13.18	140	28729	13	1700
4	0.375	0.09375	26	1425	30.9485	0	5537	30.94	9	16609	30.94	80
5	0.3125	0.078125	41	2139	53.4043	1	8357	50	19	25069	49.79	250
6	0.4375	0.546875	20	3666	22.5537	5	14399	22.75	200	43195	22.84	2800
7	0.25	0.0625	72	3649	90.9767	2	14337	81.57	71	43009	83.99	170
8	0.275	0.06875	50	2880	59.014	2	11289	59.03	67	33865	59.21	570
9	0.1875	0.046875	106	6897	134.342	25	27233	134	2800	81697	134	3487

Tabla 12.5: Soluciones Heurística / Octágonos

Instancia	$n_\delta$	$Z_I$	CPU	$n_{reduced}$	$Z_H$	CPU
1	697	18	1	371	18	0
2	1403	9	52	692	9	2
3	2449	12	202	752	12	5
4	1425	26	49	830	26	1
5	2139	41	6850	1383	41	77
6	3666	20	1430	1795	20	59
7	3649	72	22	2261	72	25
8	2880	50	20495	2254	50 (4.8 %)	3600
9	6897	106	> 12h.	5652	106(5.7 %)	3600



Figura 12.5: Inst. 7



### 12.3.5 CONCLUSIONES

En este capítulo se presentó una heurística para el empaquetamiento de objetos en un contenedor rectangular basada en la relajación lineal, tomando en cuenta en el análisis de los costos reducidos relacionados con las variables del modelo entero con desigualdades válidas y se demostró que la heurística puede servir para calcular buenas soluciones iguales o próximas a la solución del modelo original con una reducción del tiempo de cálculo, además de que esta heurística puede servir para otros objetos además del círculo.

## CAPÍTULO 13

# CONCLUSIONES

---

Las conclusiones sobre este trabajo de investigación basándose en cada una de las experimentaciones, se puede decir que el modelo matemático propuesto ofrece buenas soluciones al problema de empaquetamiento y que puede ser aplicado al empaquetamiento a una gran cantidad de objetos de distintas formas y en contenedores no rectangulares.

Ademas el desarrollo de desigualdades validas probo ser una buena técnica para reducir el tiempo en muchos problemas para alcanzar la solución optima, y se probo la debilidad de otras formulaciones (modelo compacto) ademas se implemento con éxito una heurística basada en la relajación lineal del modelo con desigualdades validas que puede ser aplicada para resolver problemas grandes o para encontrar buenas soluciones factibles que puedan ser usadas como soluciones iniciales a otros métodos.

### 13.1 TRABAJO FUTURO

El trabajo futuro que se espera de este modelo es abordar problemas de gran escala tratando de alcanzar en menor tiempo buenas soluciones mediante la relajación lagrangiana, buscar otras desigualdades validas que ayuden al modelo, buscar nuevas formulaciones que reduzcan la cantidad de variables o restricciones de los problemas, investigar mas acerca de la generación de mallas.

## APÉNDICE A

# SOLUCIONES - CÍRCULOS

---

Las imágenes siguientes corresponden a las soluciones de empaquetamiento con círculos correspondientes a la experimentación del capítulo 8, , en las imágenes se muestra la frontera del contenedor, los objetos y en que punto (punto grande) de la malla se asignaron, y los puntos de malla en la instancia.

### A.1 SOLUCIONES (UN SOLO TIPO)

Figura A.1: Inst. 1

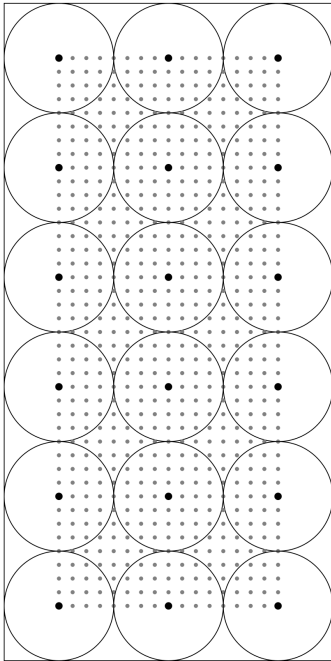


Figura A.2: Inst. 2

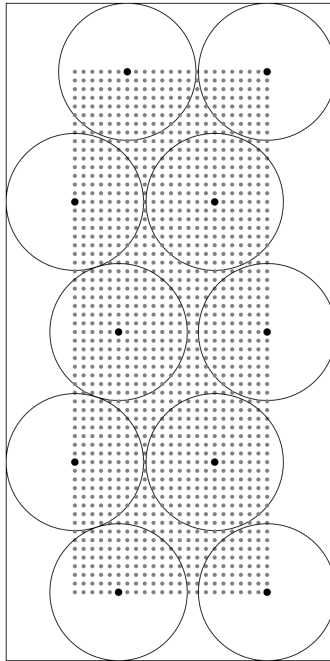


Figura A.3: Inst. 3

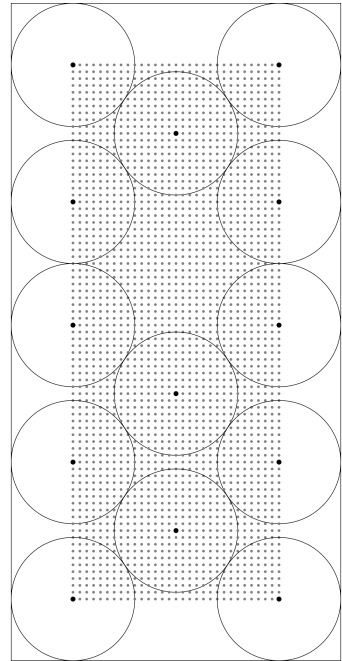


Figura A.4: Inst. 4

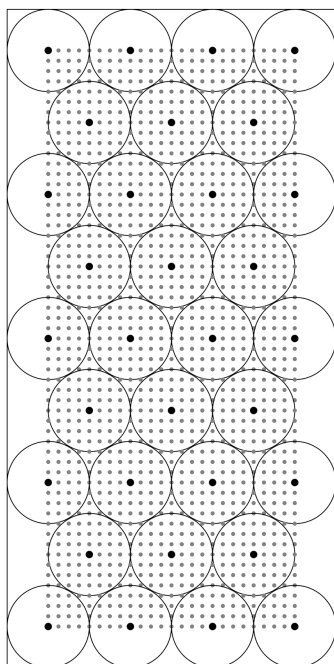


Figura A.5: Inst. 5

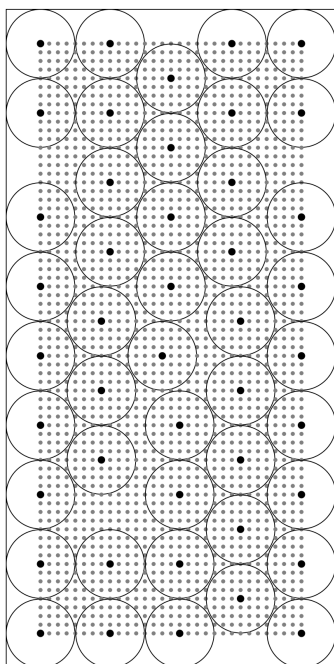


Figura A.6: Inst. 6

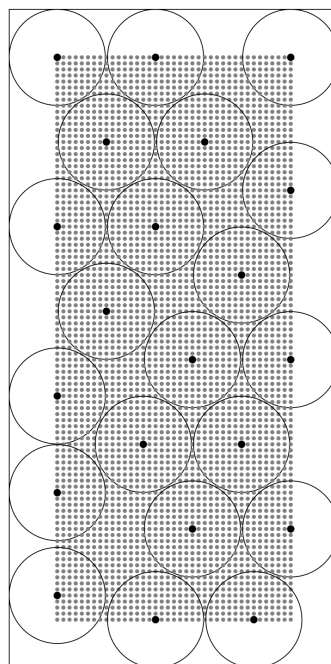


Figura A.7: Inst. 7

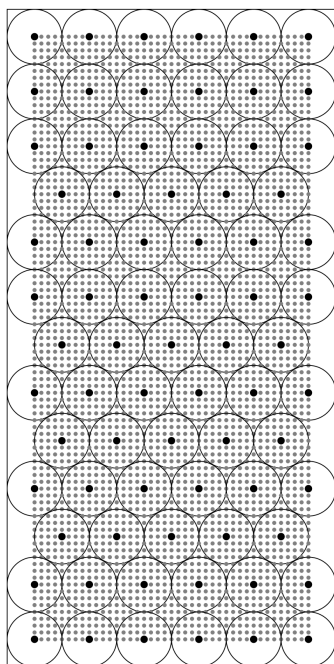


Figura A.8: Inst. 8

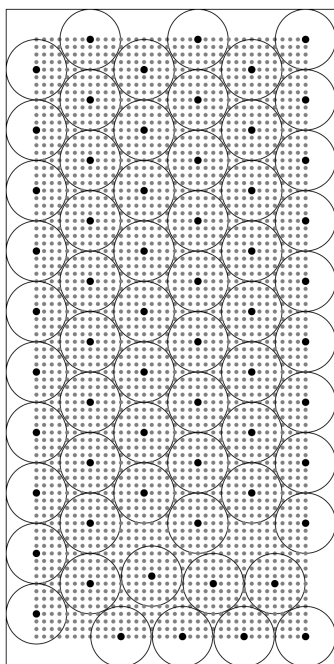
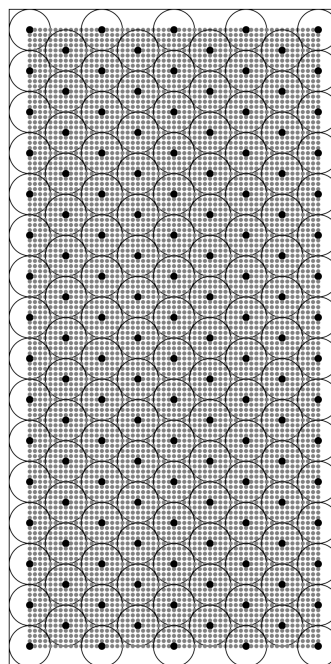


Figura A.9: Inst. 9



## A.2 SOLUCIONES (MAS DE UN TIPO)

### A.2.1 SIN TELESCOPIA

las instancias (4) y (5) no se muestran porque no se alcanzo factibilidad para estas.

Figura A.10: (1)

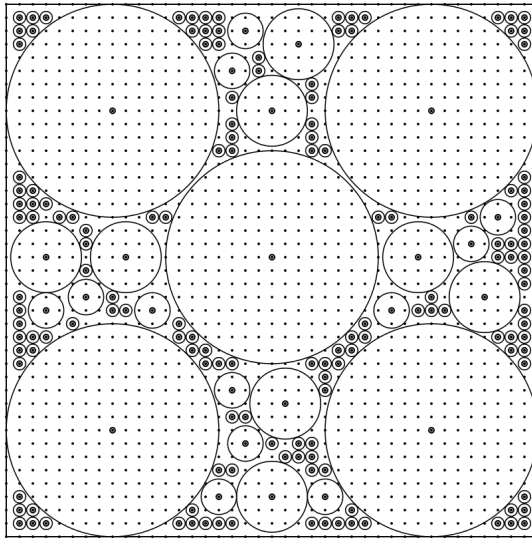


Figura A.11: (2)

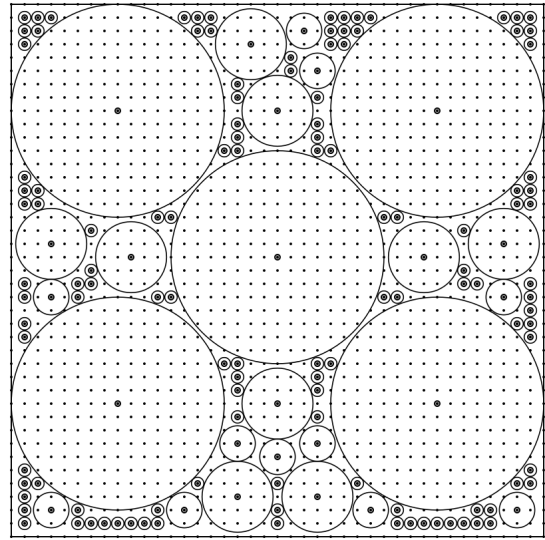
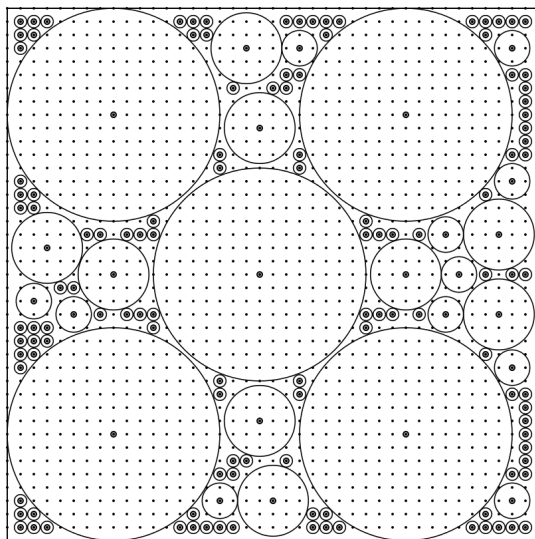


Figura A.12: (5)



### A.2.2 CON TELESCOPIA

Las soluciones para instancias (1) y (4) son semejantes y contienen mas circulos que las otras porque no estaba restringido el maximo de circulos en ambas instancias, en las instancias (2),(3),(5) y (6) existe una cantidad de circulos maxima por lo que no se pueden mas asignar mas circulos por ya no haber disponibles.

Figura A.13: (1)

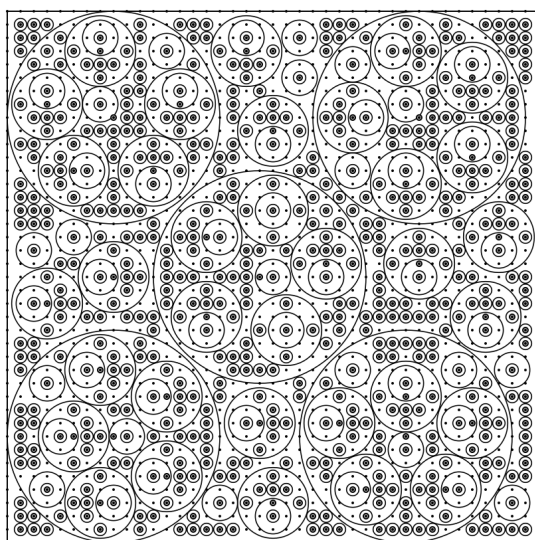


Figura A.14: (2)

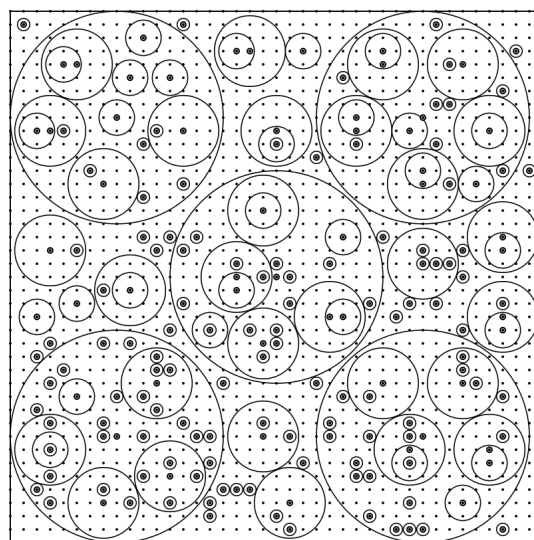


Figura A.15: (3)

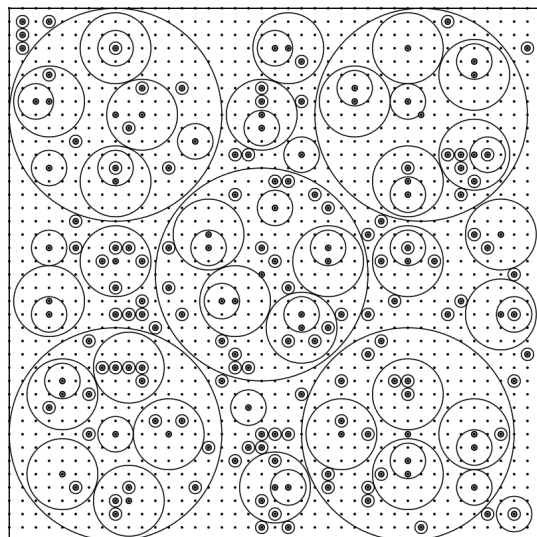


Figura A.16: (4)

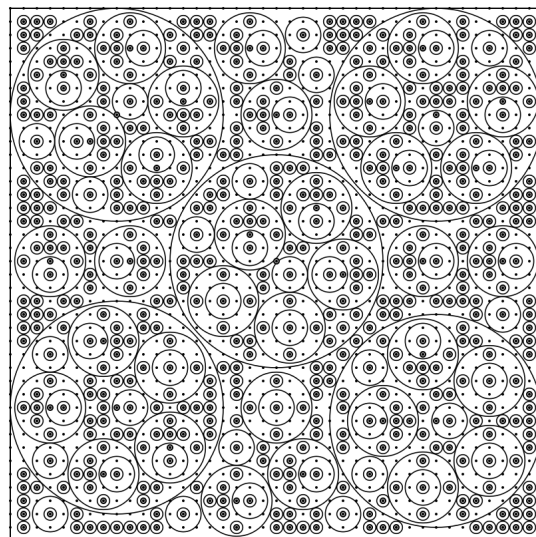


Figura A.17: (5)

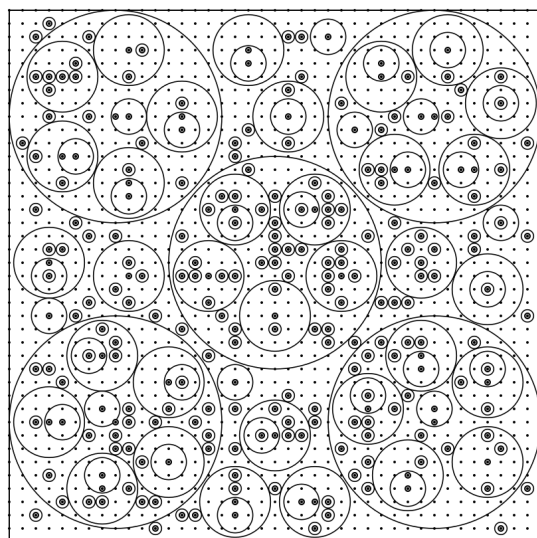
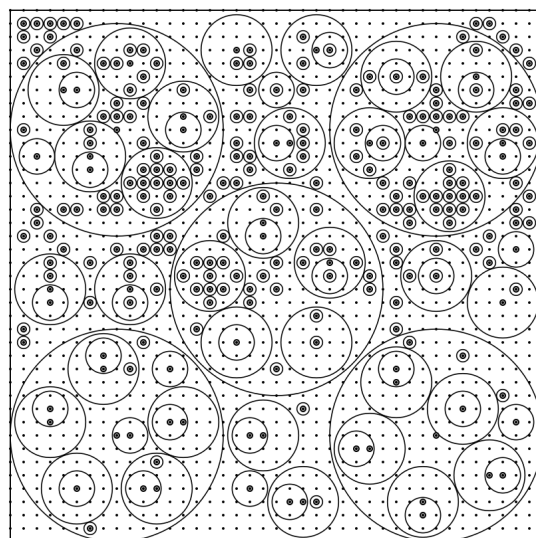


Figura A.18: (6)



## APÉNDICE B

# SOLUCIONES - OBJETOS CIRCULARES

---

Las imágenes siguientes corresponden al empaquetamiento de diferentes objetos circulares del capítulo 9, en las imágenes se muestra la frontera del contenedor, los objetos empacados y en que punto (punto grande) de la malla fueron colocados (excepto octágonos), los puntos de malla en la instancia, y en caso de objetos (octágonos) con espesor, el grosor de estos.

### B.1 SOLUCIONES (DIFERENTES OBJETOS)

Figura B.1: Inst. 1

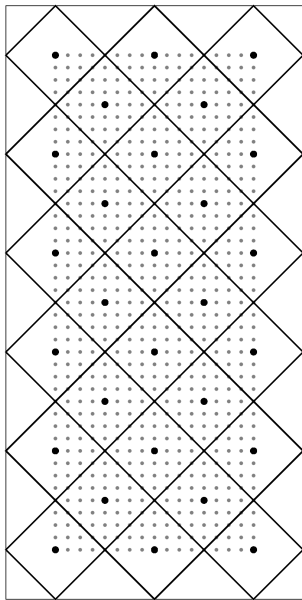


Figura B.2: Inst. 1

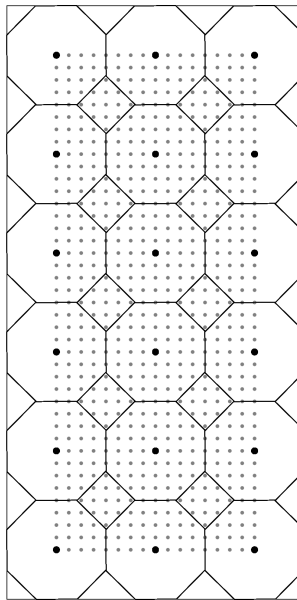


Figura B.3: Inst. 1

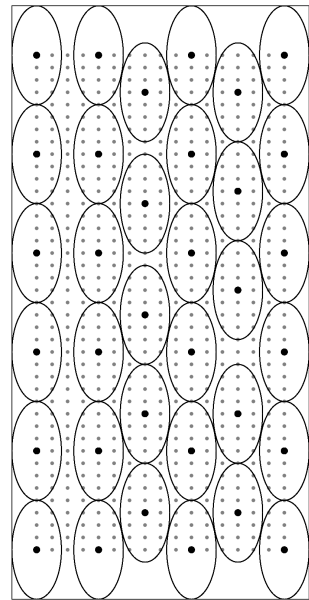




Figura B.4: Inst. 2

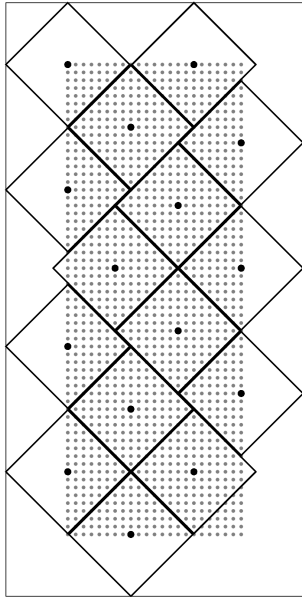


Figura B.5: Inst. 2

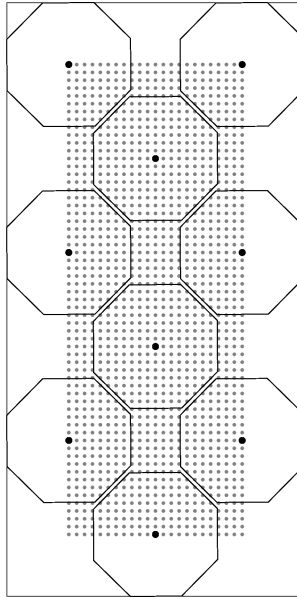


Figura B.6: Inst. 2

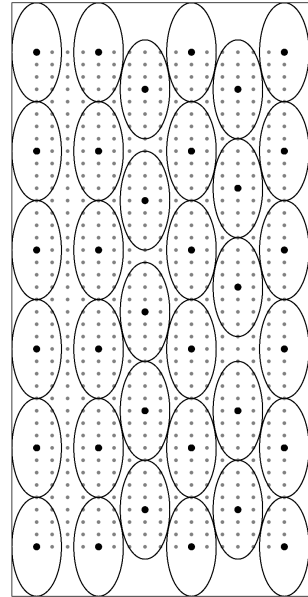


Figura B.7: Inst. 3

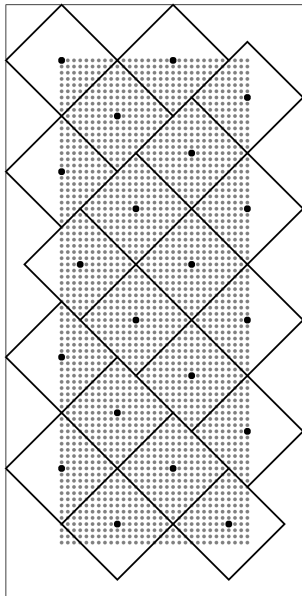


Figura B.8: Inst. 3

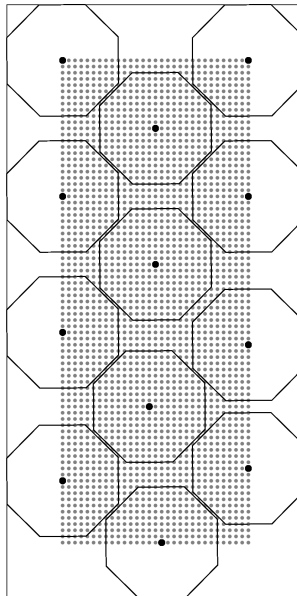


Figura B.9: Inst. 3

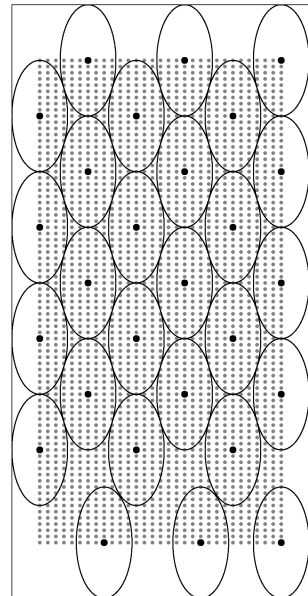


Figura B.10: Inst. 4

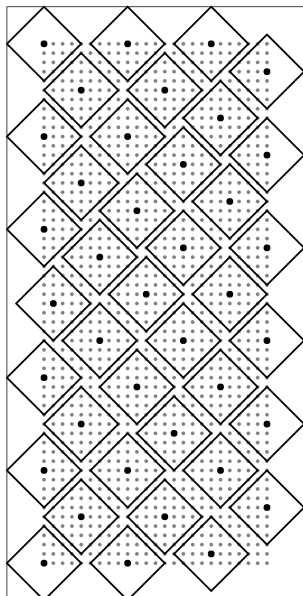


Figura B.11: Inst. 4

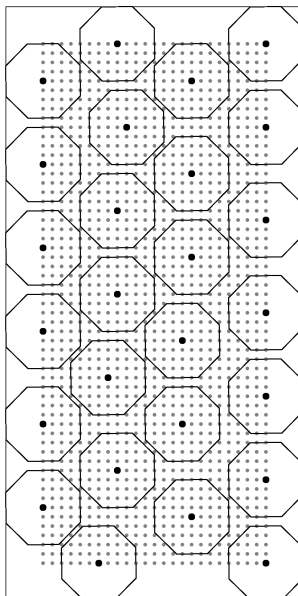


Figura B.12: Inst. 4

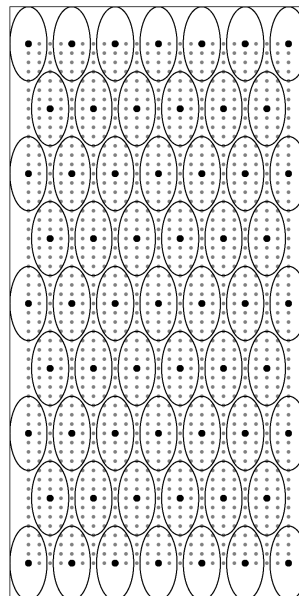


Figura B.13: Inst. 5

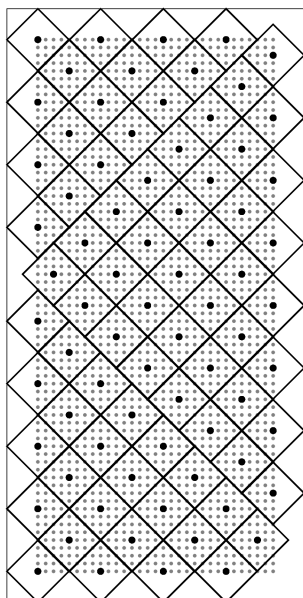


Figura B.14: Inst. 5

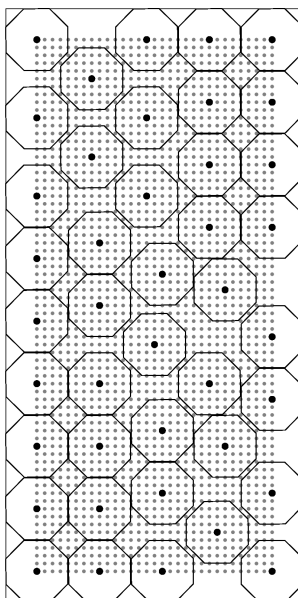


Figura B.15: Inst. 5

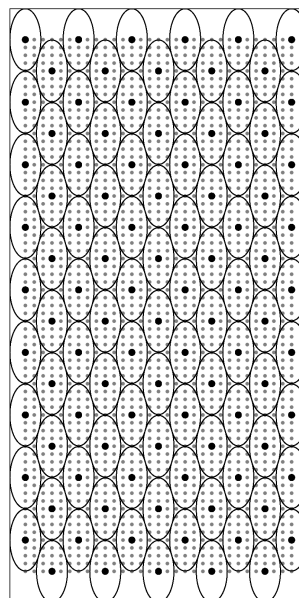


Figura B.16: Inst. 6

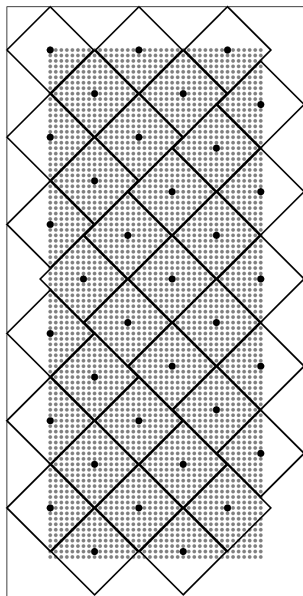


Figura B.17: Inst. 6

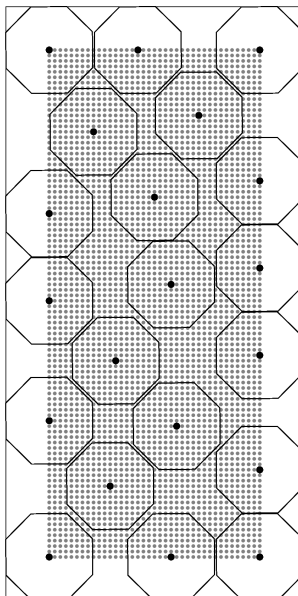


Figura B.18: Inst. 6

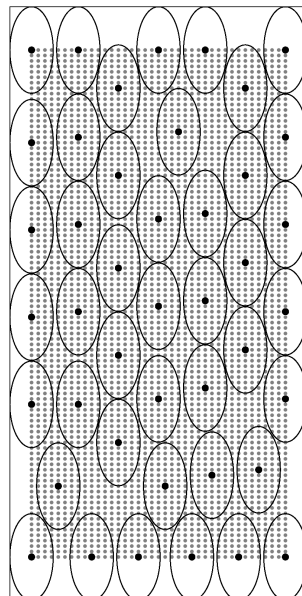


Figura B.19: Inst. 7

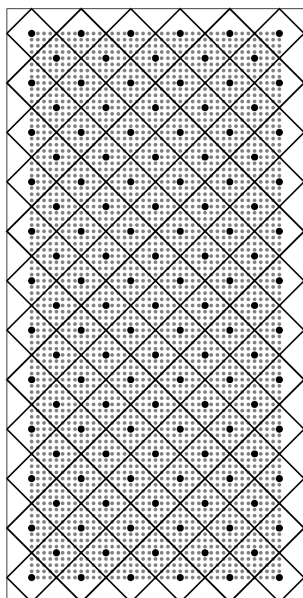


Figura B.20: Inst. 7

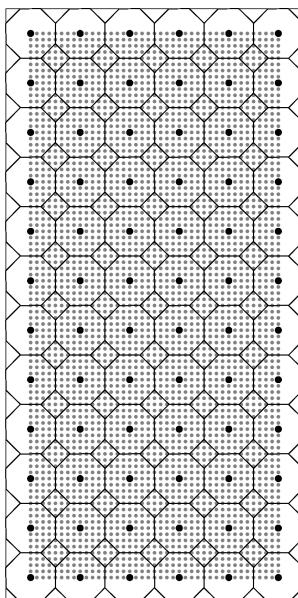


Figura B.21: Inst. 7

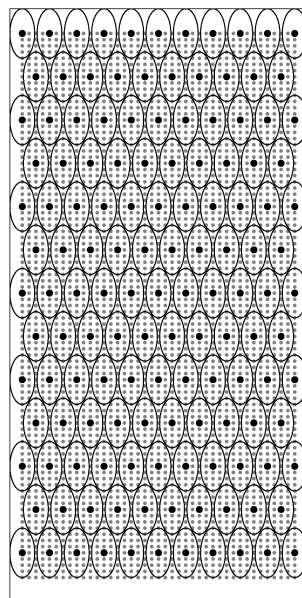


Figura B.22: Inst. 8

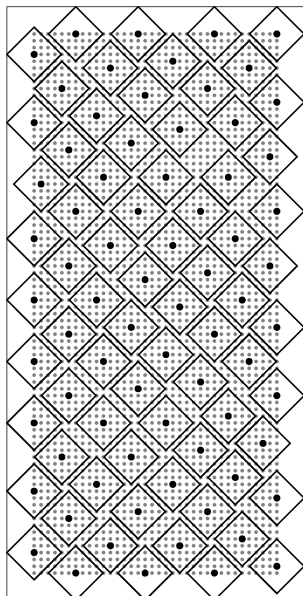


Figura B.23: Inst. 8

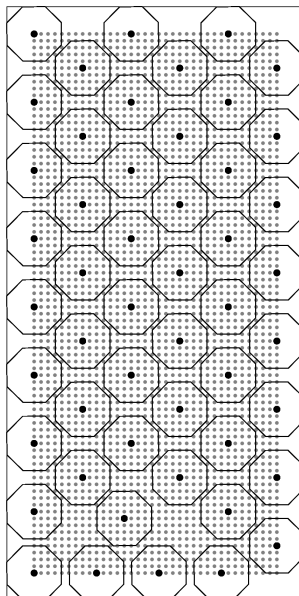


Figura B.24: Inst. 8

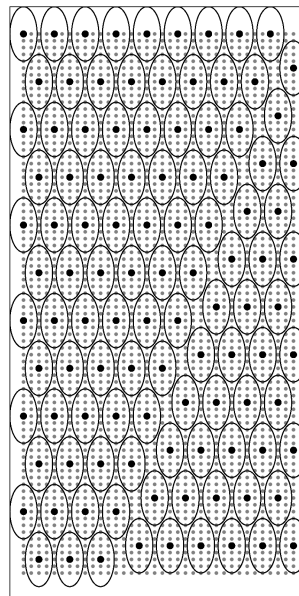


Figura B.25: Inst. 9

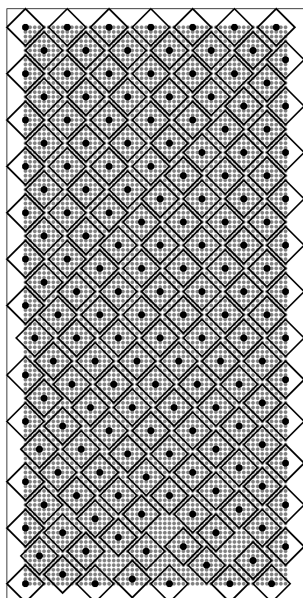


Figura B.26: Inst. 9

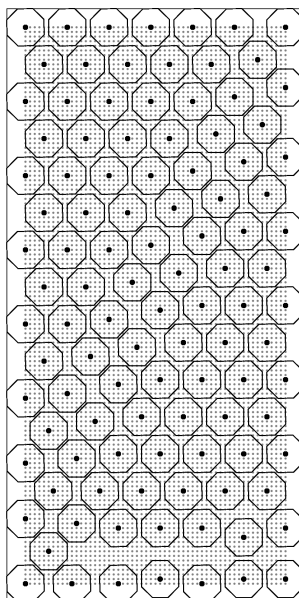
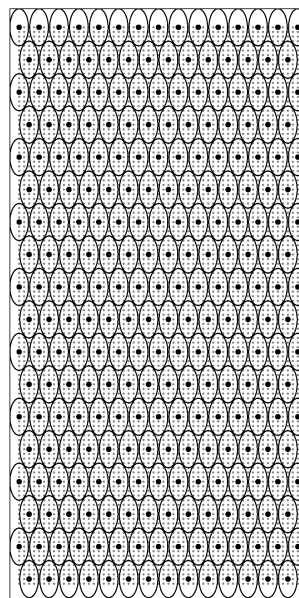


Figura B.27: Inst. 9



## B.2 SOLUCIONES (OCTÁGONOS ST,CT,CTB )

### Instancia 1

Figura B.28: 1,ST

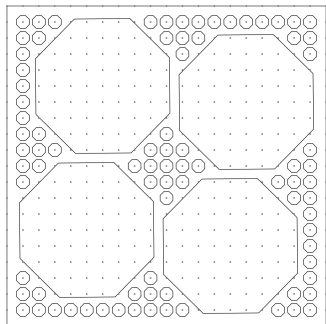


Figura B.29: 1,CT

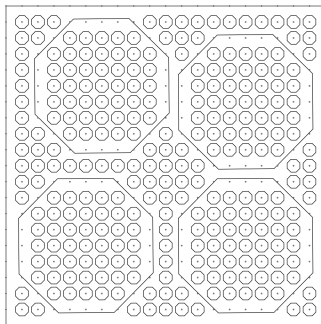
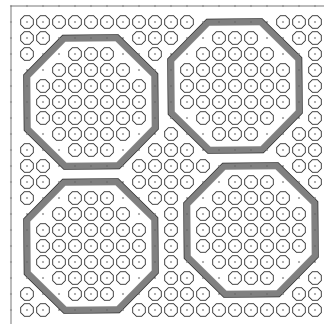


Figura B.30: 1,CTB



### Instancia 2

Figura B.31: 2,ST

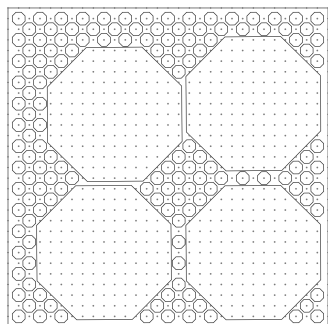


Figura B.32: 2,CT

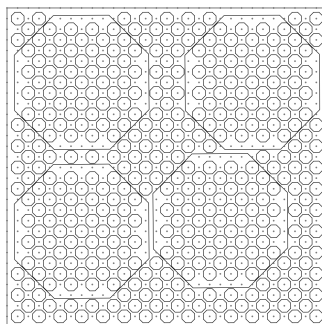
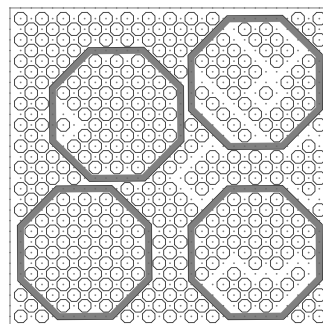


Figura B.33: 2,CTB



### Instancia 3

Figura B.34: 3,ST

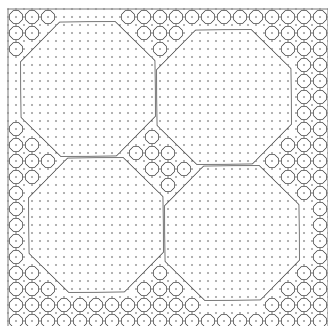


Figura B.35: 3,CT

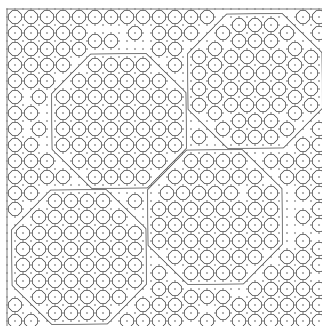
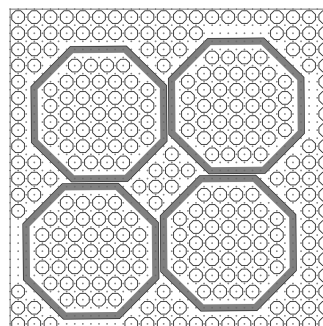


Figura B.36: 3,CTB



Instancia 4

Figura B.37: 4,ST

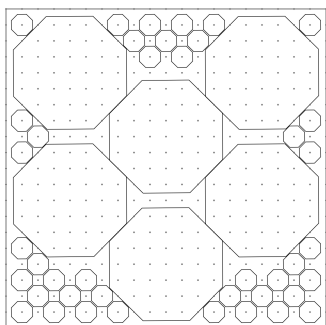


Figura B.38: 4,CT

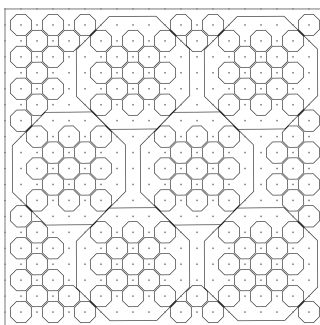
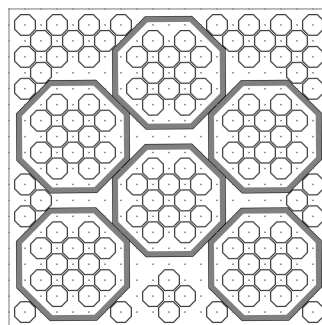


Figura B.39: 4,CTB



Instancia 5

Figura B.40: 5,ST

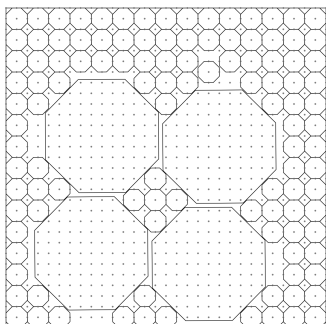


Figura B.41: 5,CT

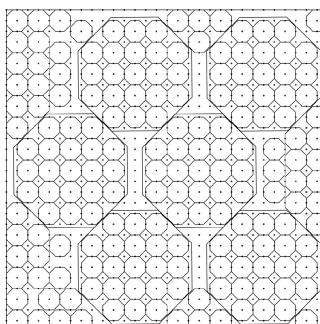
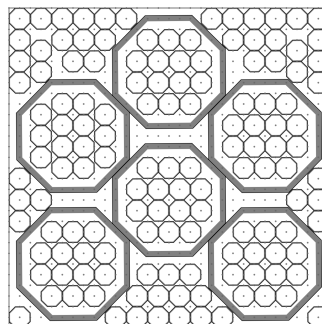


Figura B.42: 5,CTB



Instancia 6

Figura B.43: 6,ST

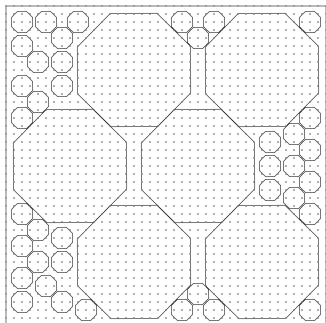


Figura B.44: 6,CT

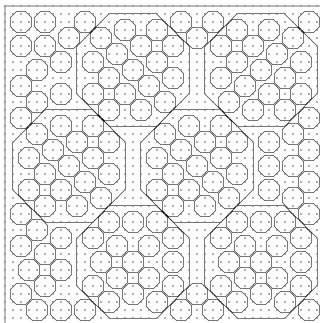
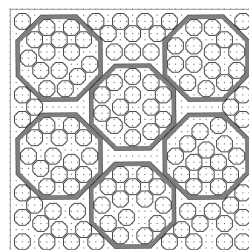


Figura B.45: 6,CTB



## APÉNDICE C

# SOLUCIONES - OBJETOS ESTRELLA

---

Las imágenes siguientes corresponden al empaquetamiento objetos estrella de la experimentación del capítulo 10, en las imágenes se muestra la frontera del contenedor, los objetos empacados y en que punto (punto grande) de la malla fueron colocados, y los puntos de la malla para la instancia.

## C.1 SOLUCIONES EMPAQUETAMIENTO DE OBJETO ESTRELLA

Figura C.1: Inst. 1

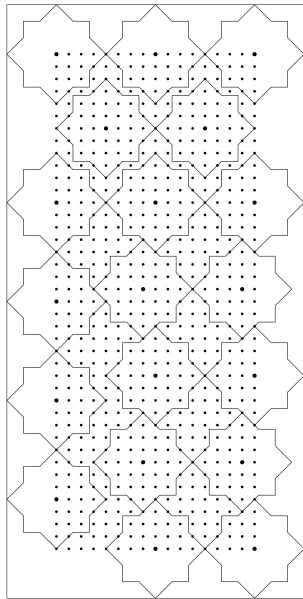


Figura C.2: Inst. 2

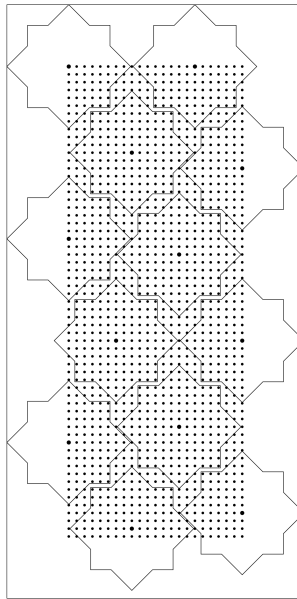
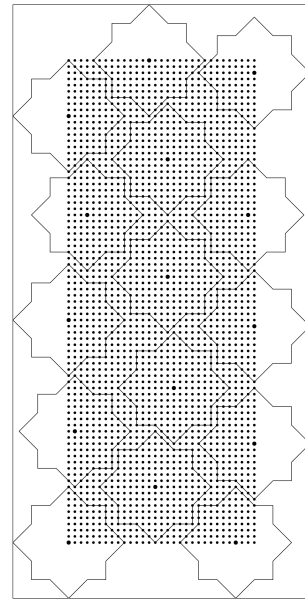


Figura C.3: Inst. 3



## C.2 SOLUCIONES DIVERSOS TIPOS DE OBJETOS

### ESTRELLA Y TELESCOPIA



Figura C.4: Inst. 4

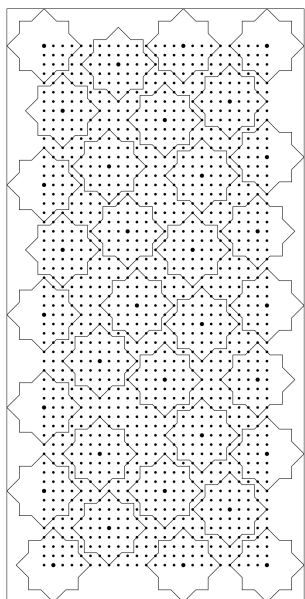


Figura C.5: Inst. 5

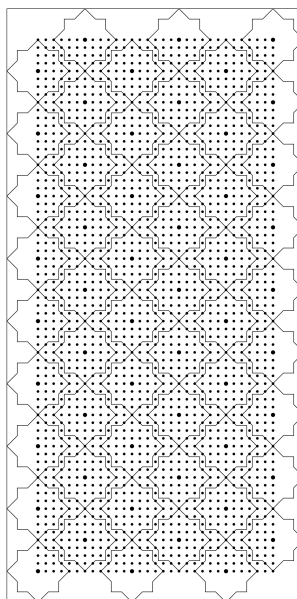


Figura C.6: Inst. 6

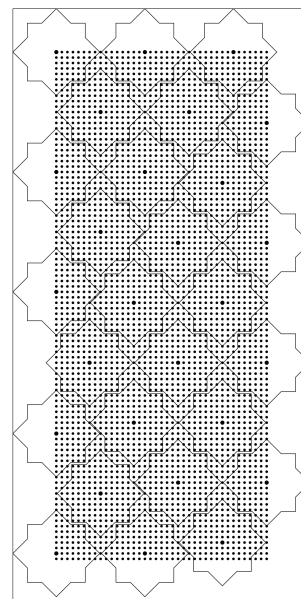


Figura C.7: Inst. 7

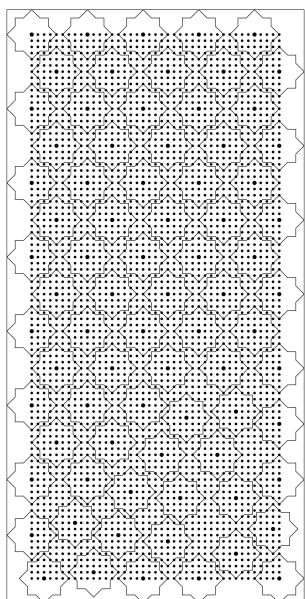


Figura C.8: Inst. 8

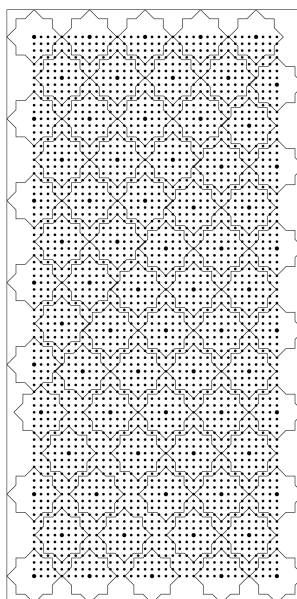


Figura C.9: Inst. 9

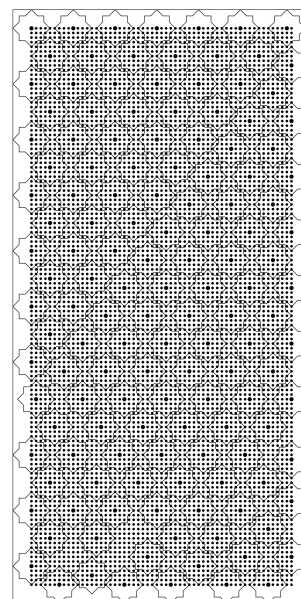


Figura C.10: Inst. 1-ST

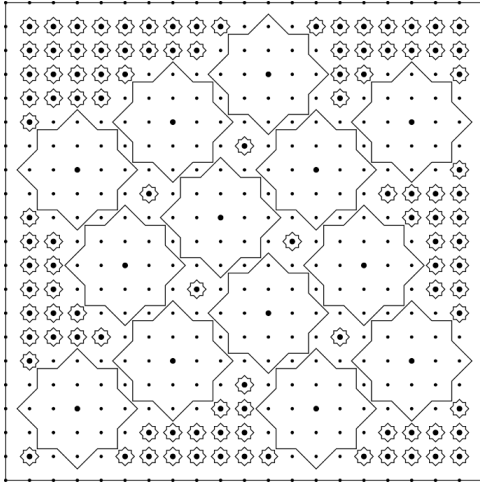


Figura C.11: Inst. 1-CT

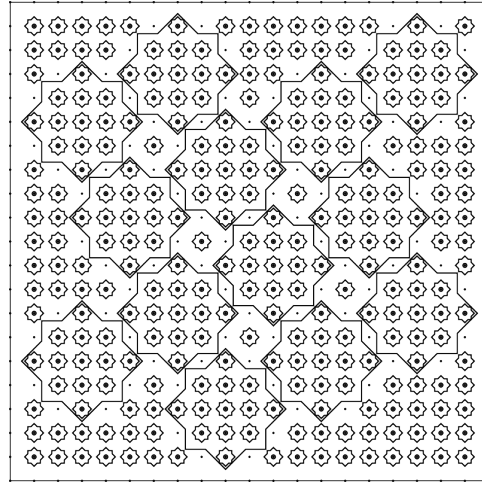


Figura C.12: Inst. 2-ST

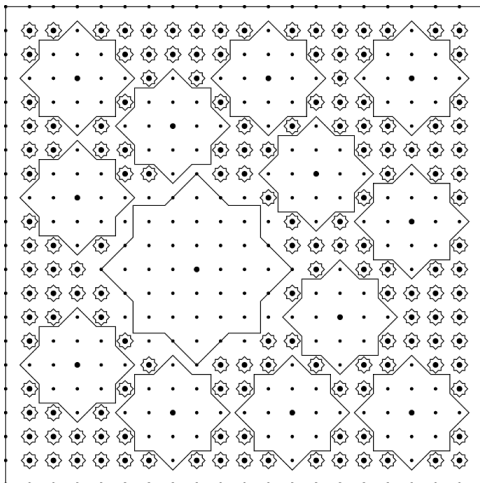


Figura C.13: Inst. 2-CT

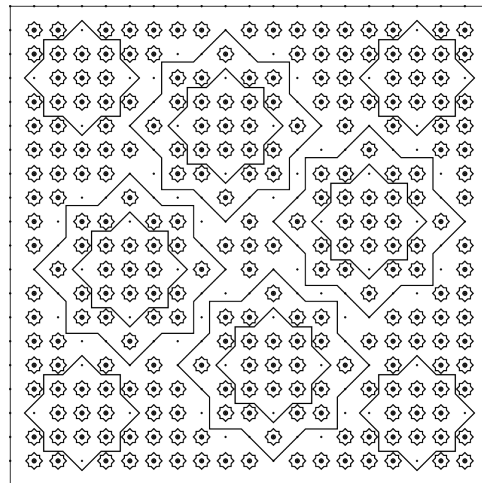


Figura C.14: Inst. 3-ST

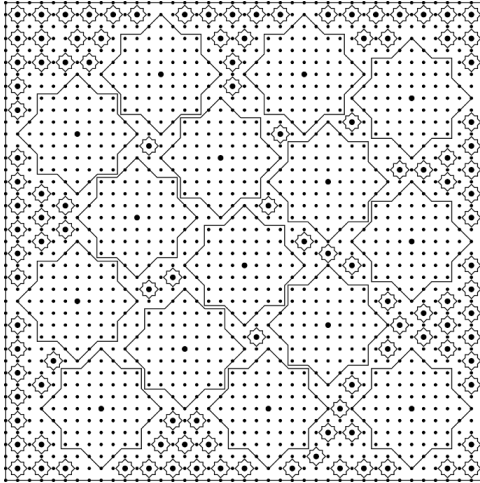


Figura C.15: Inst. 3-CT

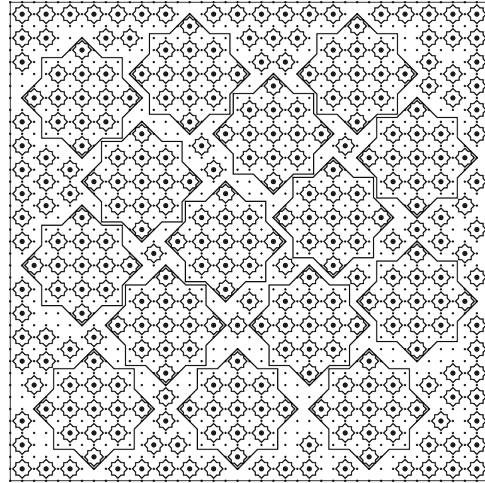


Figura C.16: Inst. 4-ST

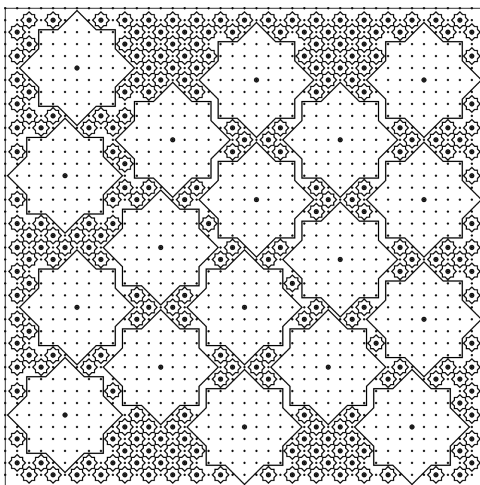


Figura C.17: Inst. 4-CT

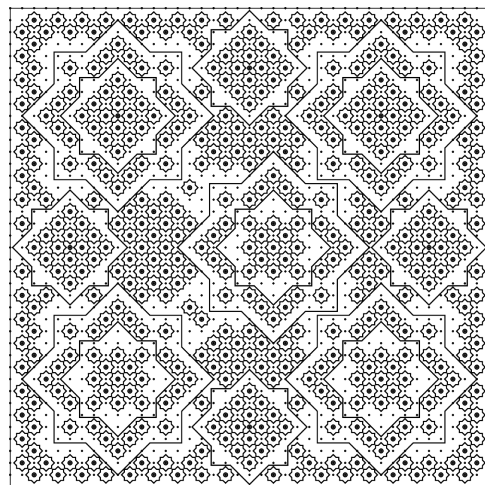
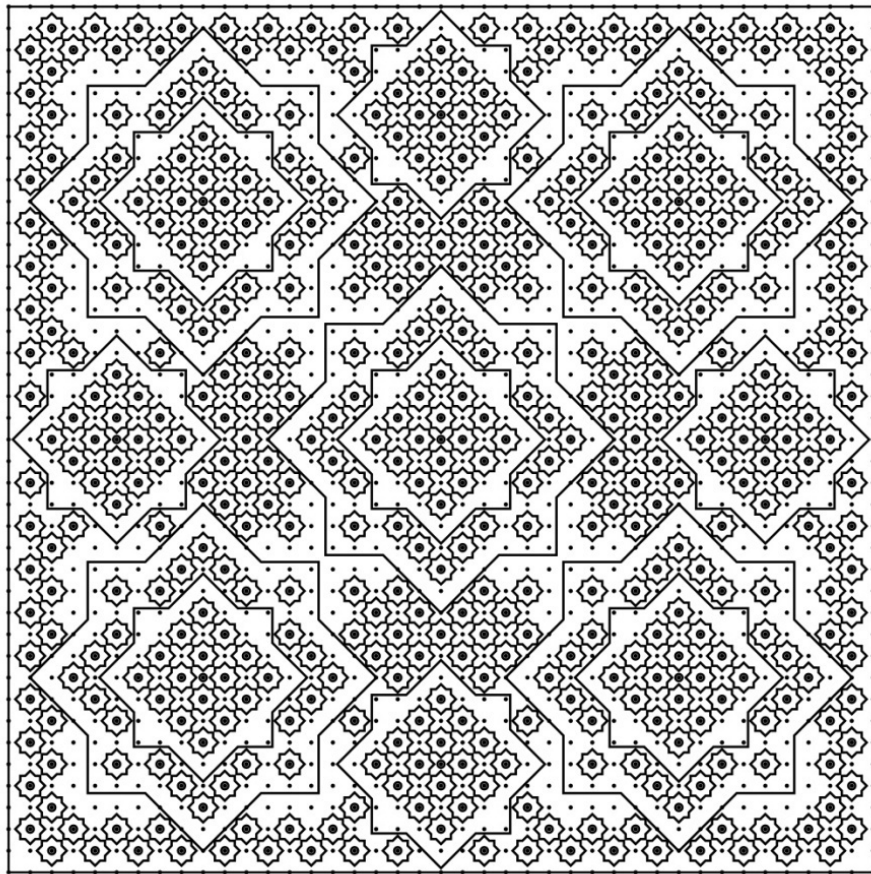


Figura C.18: Inst. 4-CT (\*)



## APÉNDICE D

# SOLUCIONES - OBJETOS L

---

Las imágenes siguientes corresponden al empaquetamiento objetos L de la experimentación del capítulo 11, en las imágenes se muestra la frontera del contenedor, el objeto y a que punto de malla esta asignado (punto grande), los puntos de la malla para la instancia, en instancias con mas de un tipo  $k$  se asigna un color de fondo (tono de gris) para cada tipo de objeto  $k$ .

## D.1 SOLUCIONES (UN SOLO TIPO)

Figura D.1: Inst. 1 (R:R)

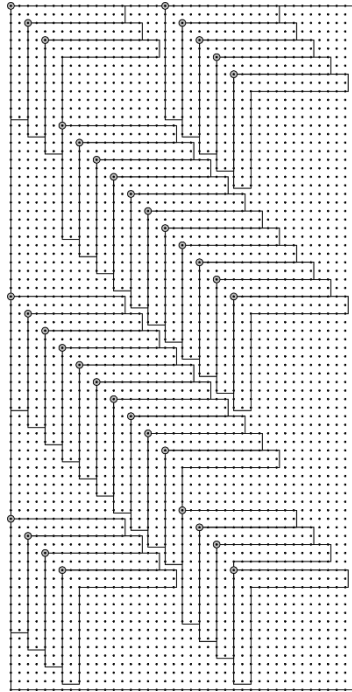


Figura D.2: Inst. 1 (R:2R)

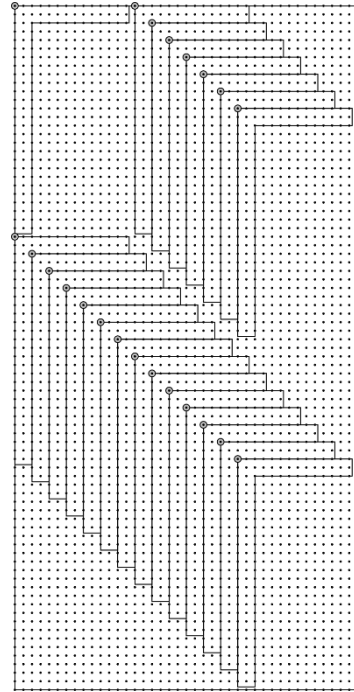


Figura D.3: Inst. 2 (R:R)

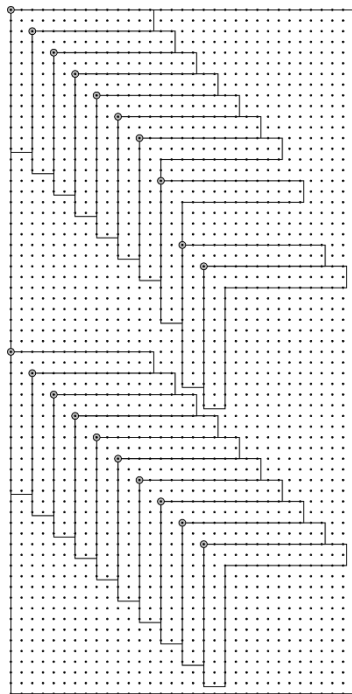


Figura D.4: Inst. 2 (R:2R)

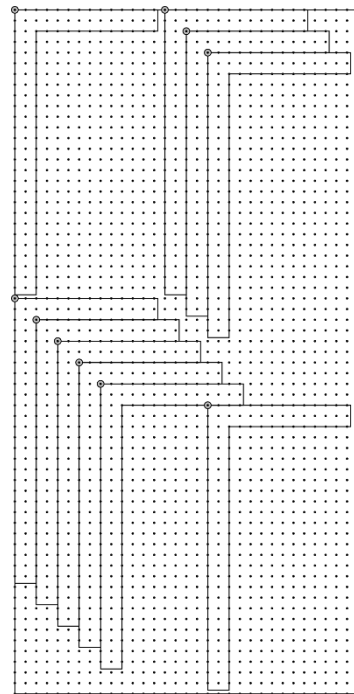


Figura D.5: Inst. 3 (R:R)

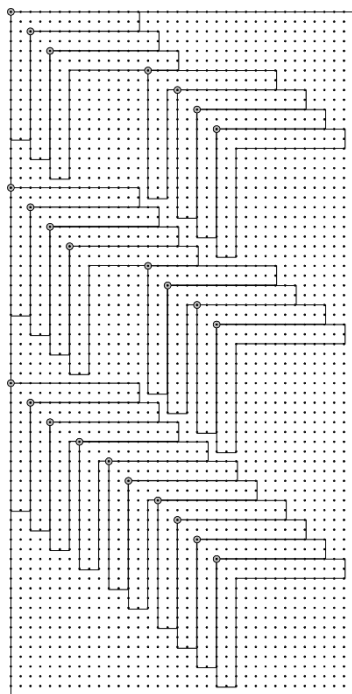


Figura D.6: Inst. 3 (R:2R)

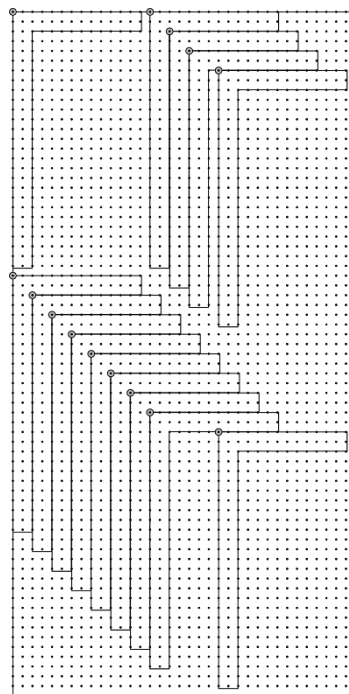


Figura D.7: Inst. 4 (R:R)

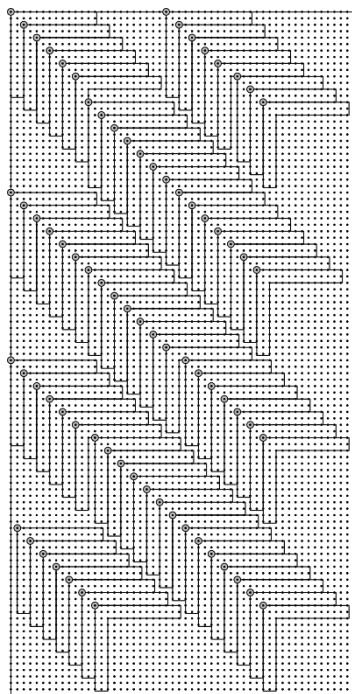


Figura D.8: Inst. 4 (R:2R)

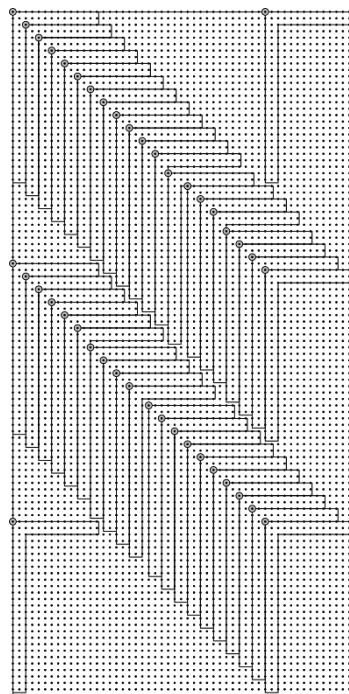


Figura D.9: Inst. 5 (R:R)

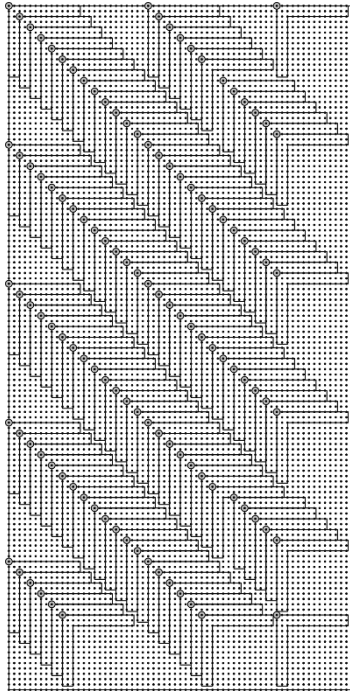


Figura D.10: Inst. 5 (R:2R)

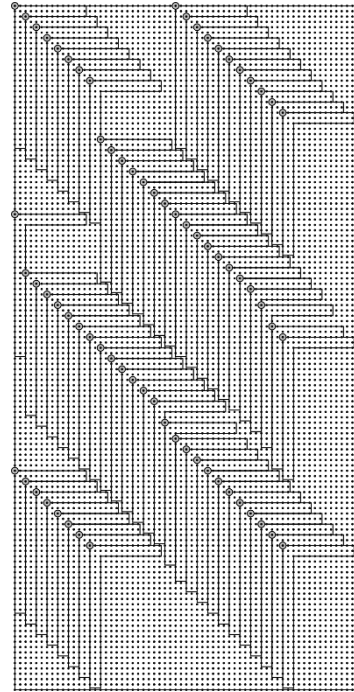


Figura D.11: Inst. 6 (R:R)

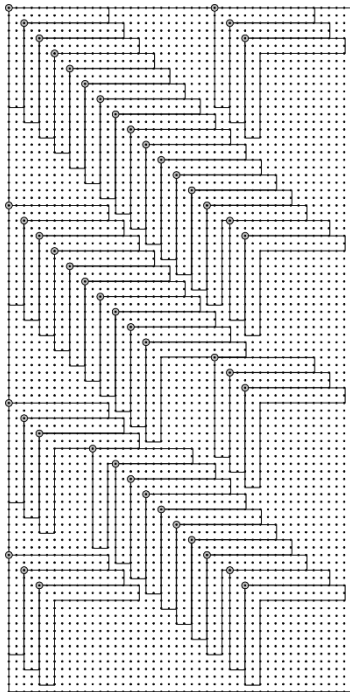
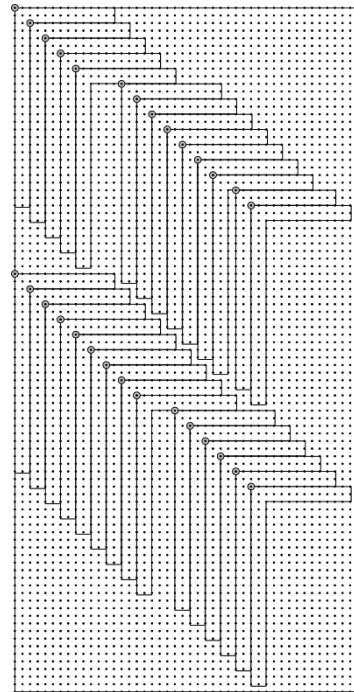


Figura D.12: Inst. 6 (R:2R)





## D.2 SOLUCIONES (DIFS. TIPOS)

Figura D.13: 1,ST,(R:R)

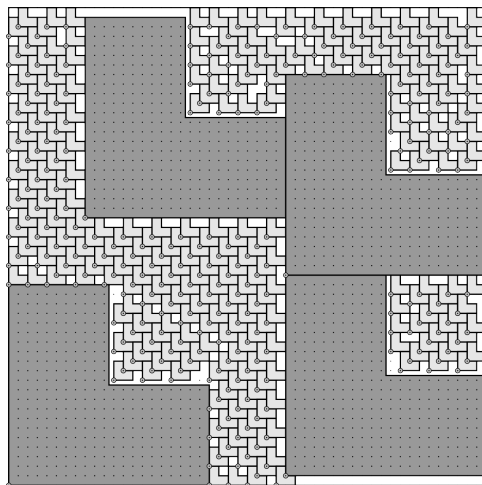


Figura D.14: 1,CT,(R:R)

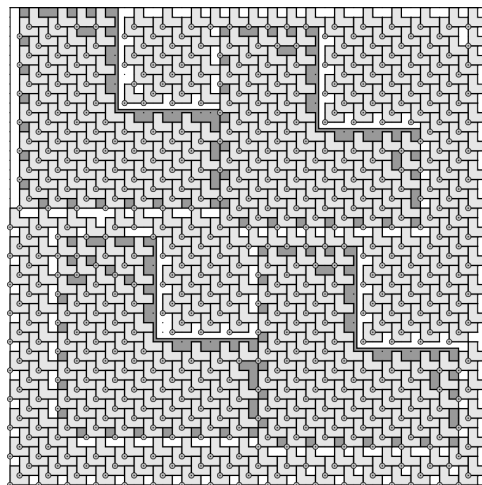


Figura D.15: 2,ST,(R:2R)

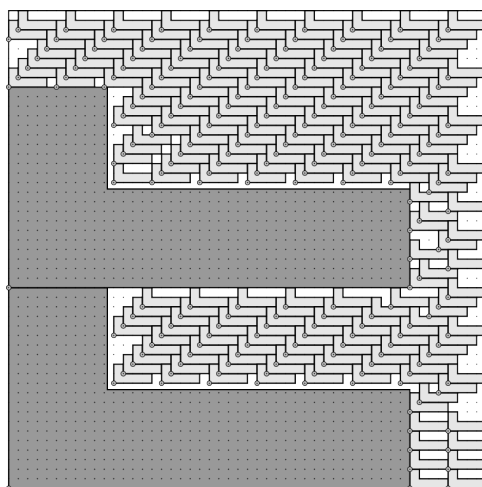


Figura D.16: 2,CT,(R:2R)

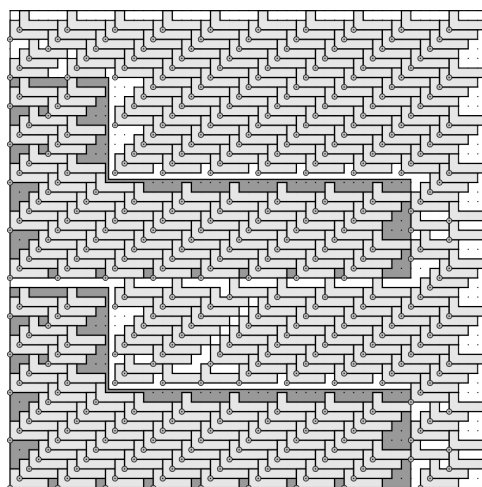


Figura D.17: 3,ST,(R:R)

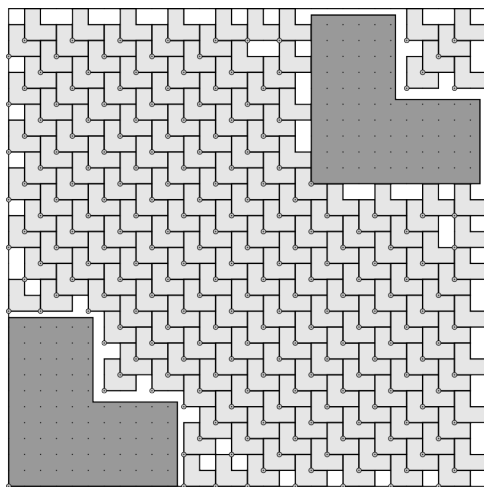


Figura D.18: 3,CT,(R:R)

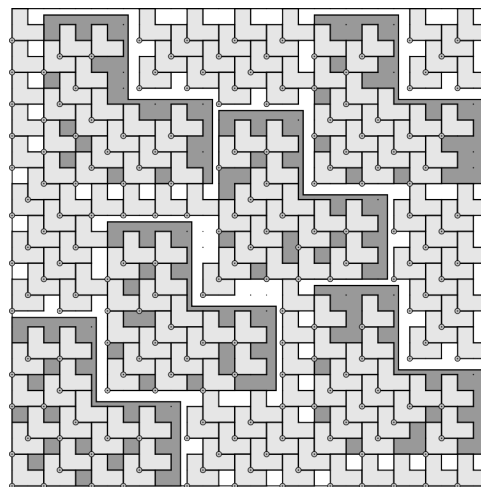


Figura D.19: 4,ST,(R:R)

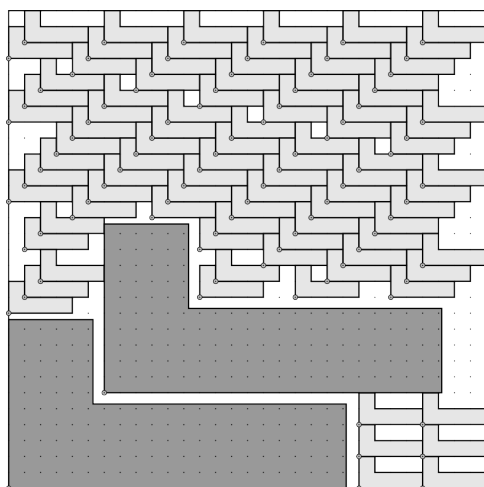
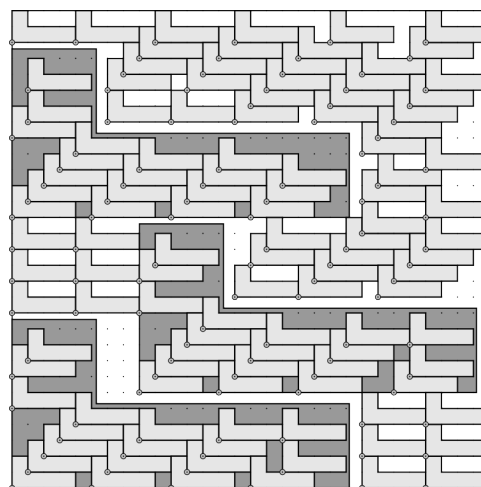


Figura D.20: 4,CT,(R:R)



### D.3 SOLUCIONES (DIFS. ORIENTACIONES)

Figura D.21: 1,ST,(R:R)

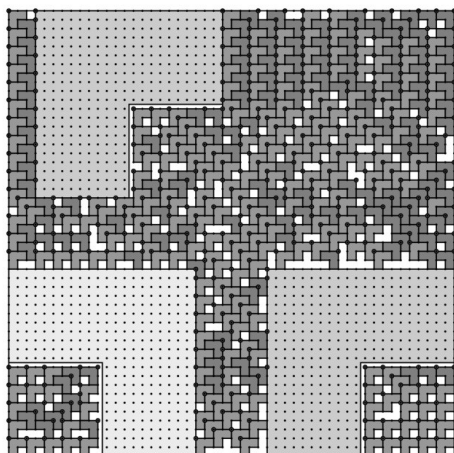


Figura D.22: 1,CT,(R:R)

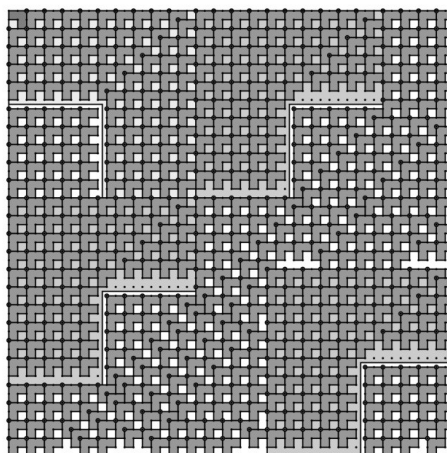


Figura D.23: 2,ST,(R:2R)

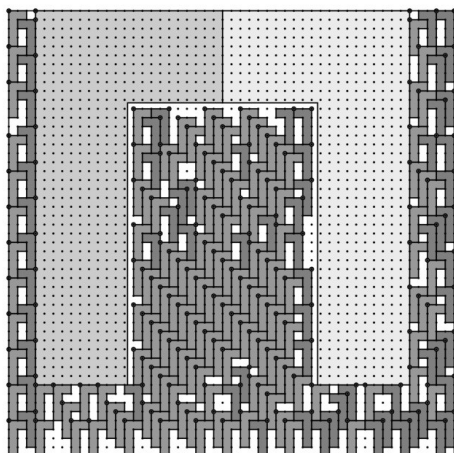


Figura D.24: 2,CT,(R:2R)

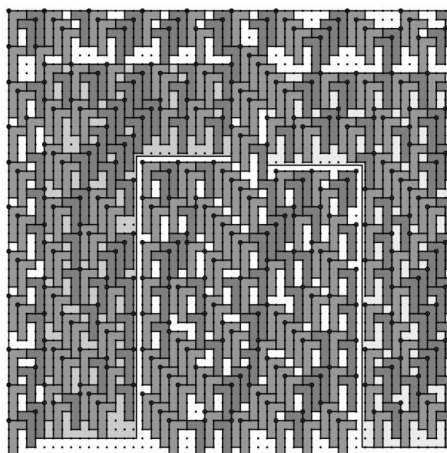


Figura D.25: 3,ST,(R:R)

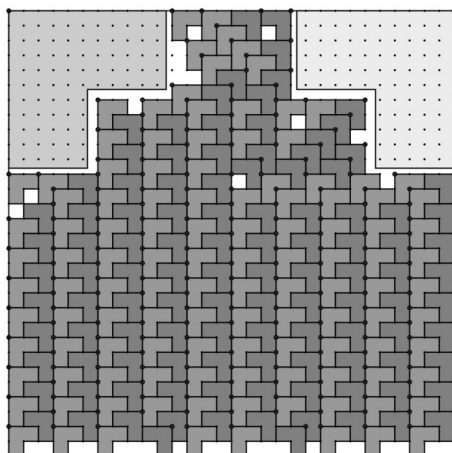


Figura D.26: 3,CT,(R:R)

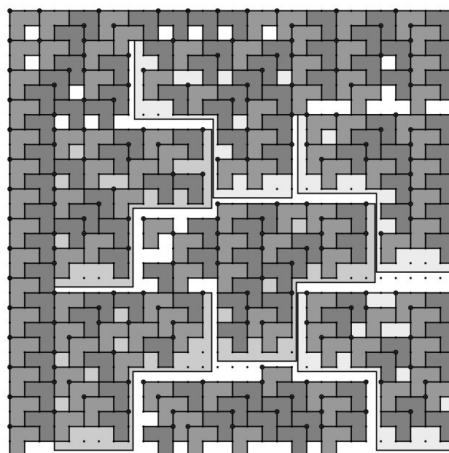


Figura D.27: 4,ST,(R:2R)

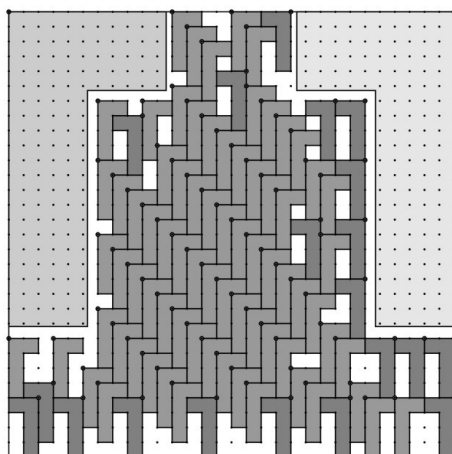


Figura D.28: 4,CT,(R:2R)

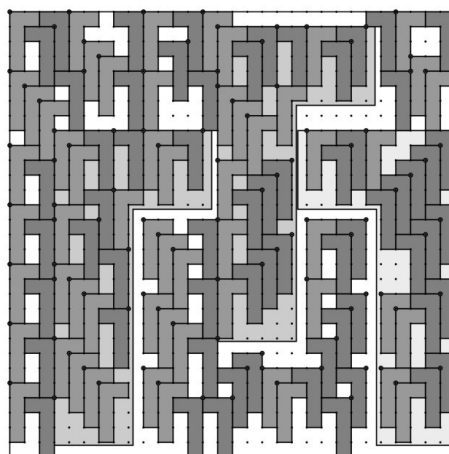


Figura D.29: 1,CT,8hr.,(R:R)

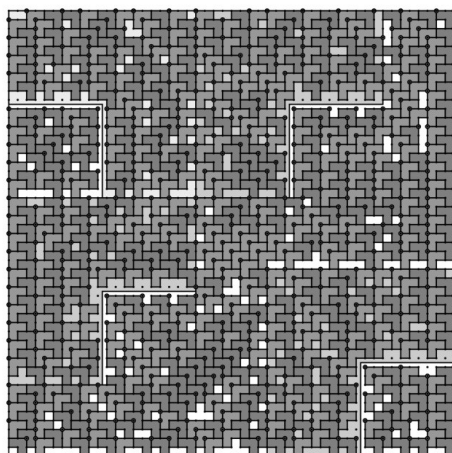


Figura D.30: 2,CT,8hr.,(R:2R)

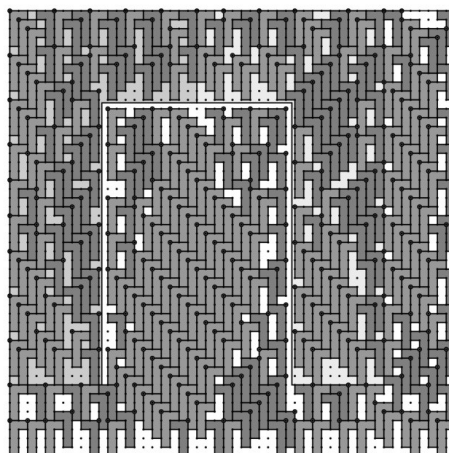


Figura D.31: 3,CT,8hr.,(R:R)

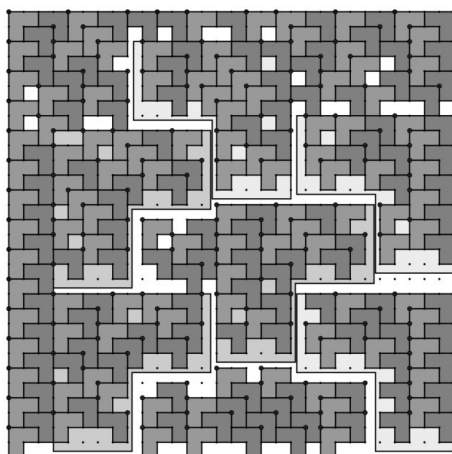
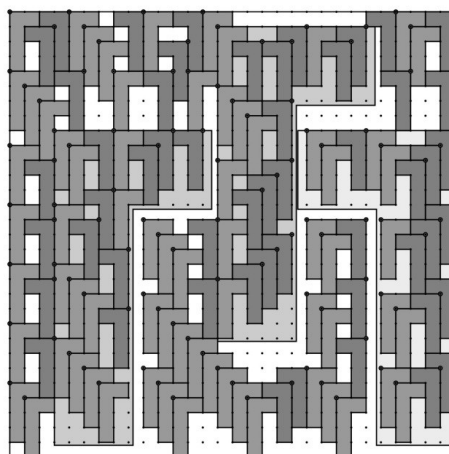


Figura D.32: 4,CT,8hr.,(R:2R)



## D.4 CONTENEDOR L

Figura D.33: 1,ST

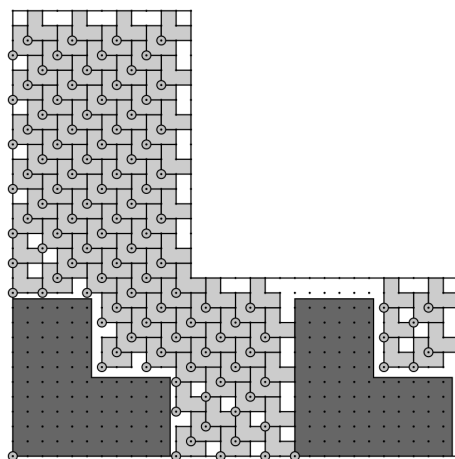


Figura D.34: 1,CT

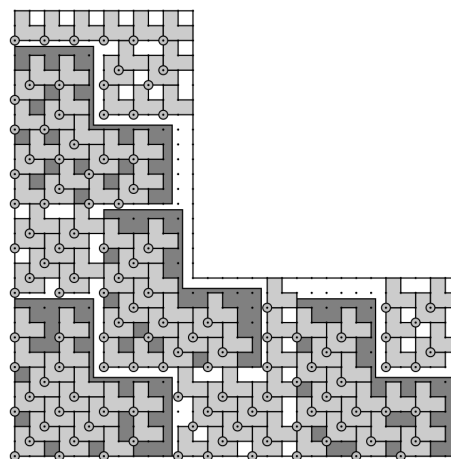


Figura D.35: 2,ST

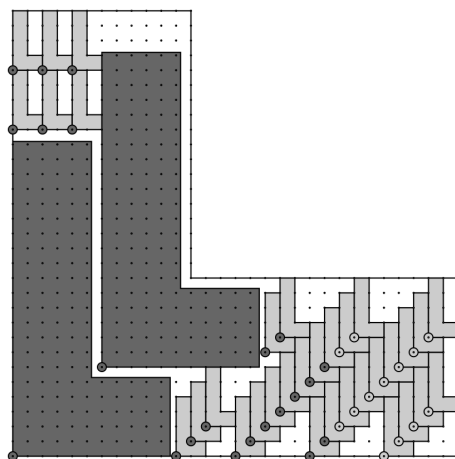
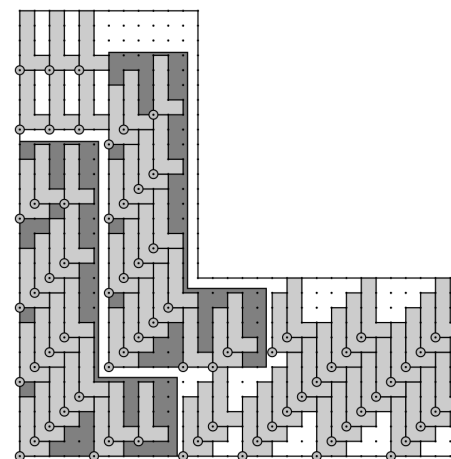


Figura D.36: 2,CT



## APÉNDICE E

# SOLUCIONES - HEURÍSTICA

---

Imágenes correspondientes a empaquetamiento de círculos y octágonos para heurística del capítulo 12, en las imágenes se muestra la frontera del contenedor, el objeto y a que punto de la malla esta asignado (punto grande), y los puntos de la malla no eliminados por la heurística.

### E.1 CIRCULOS

Figura E.1: Inst. 1

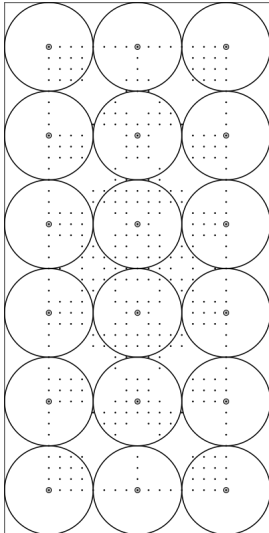


Figura E.2: Inst. 2

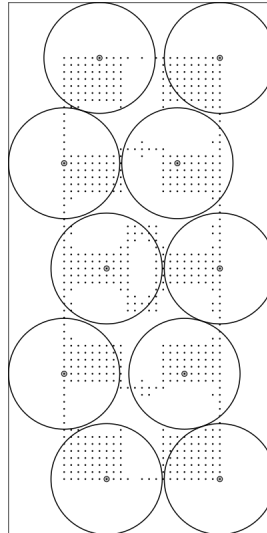


Figura E.3: Inst. 3

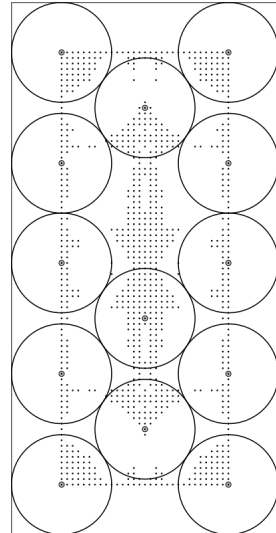


Figura E.4: Inst. 4

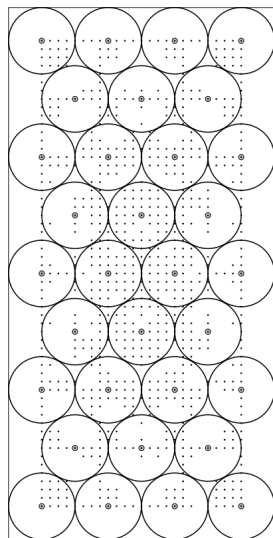


Figura E.5: Inst. 5

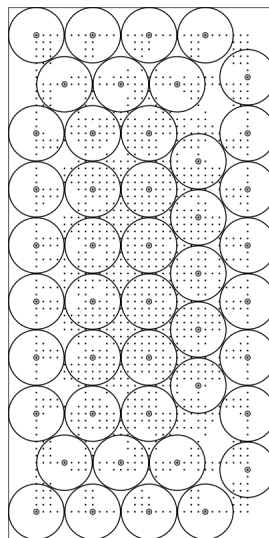


Figura E.6: Inst. 6

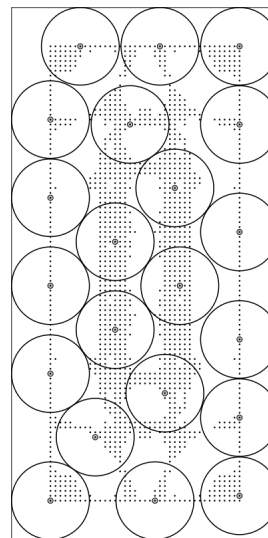


Figura E.7: Inst. 7

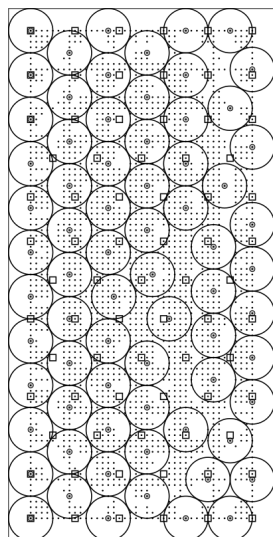


Figura E.8: Inst. 8

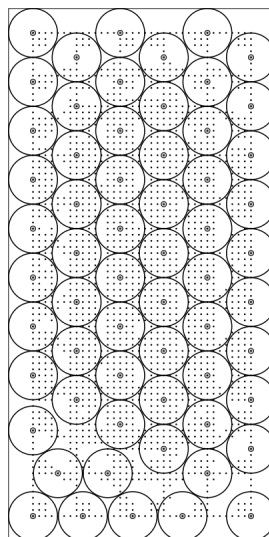
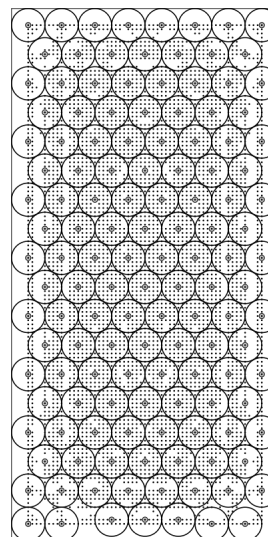


Figura E.9: Inst. 9





## E.2 OCTAGONOS

Figura E.10: Inst. 1

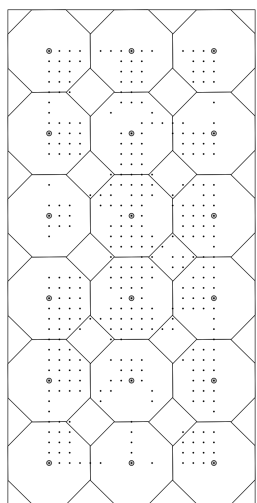


Figura E.11: Inst. 2

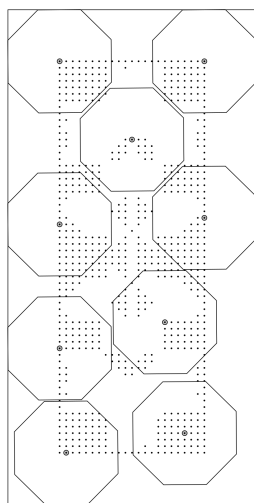


Figura E.12: Inst. 3

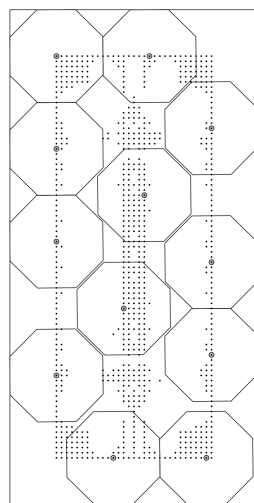


Figura E.13: Inst. 4

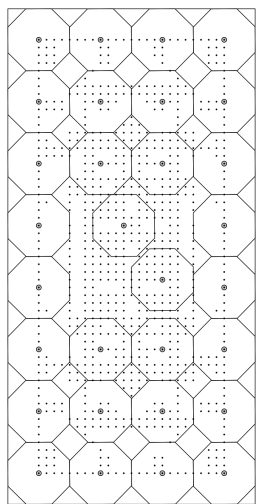


Figura E.14: Inst. 5

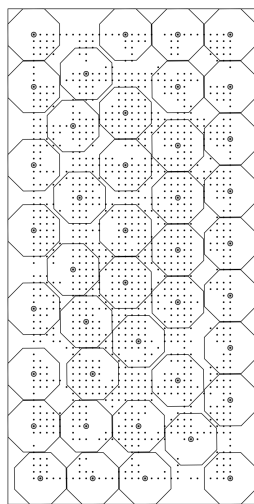


Figura E.15: Inst. 6

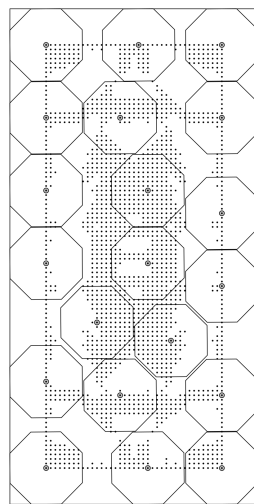


Figura E.16: Inst. 7

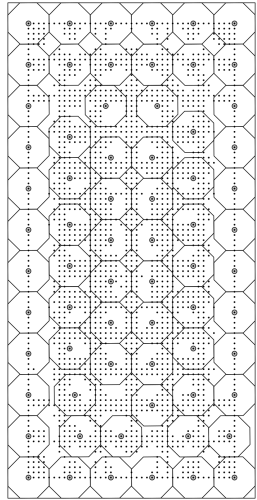


Figura E.17: Inst. 8

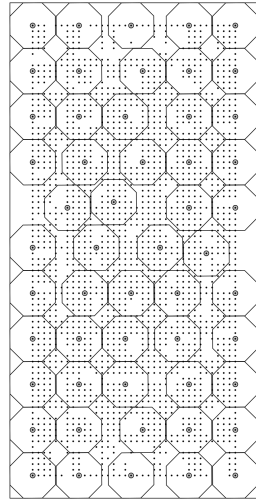
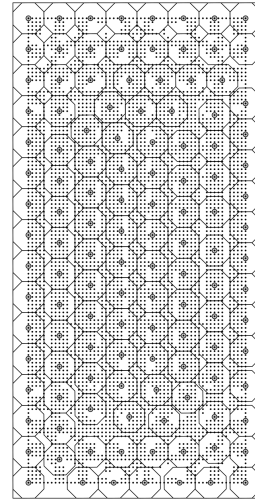


Figura E.18: Inst. 9



# ÍNDICE DE FIGURAS

---

3.1.	Aplicaciones del problema empaquetamiento . . . . .	13
3.2.	Corte en 3 dimensiones . . . . .	14
3.3.	Corte de acero o papel . . . . .	15
3.4.	Cobertura de antenas . . . . .	15
3.5.	Aplicaciones (empaquetamiento de objetos circulares) . . . . .	16
3.6.	Otros tipos de objetos curvos . . . . .	16
3.7.	Esquema de Radioterapia . . . . .	17
3.8.	Aplicación para el empaquetamiento con telescopia . . . . .	18
3.9.	Aplicación en corte textil . . . . .	18
3.10.	Partículas confinadas . . . . .	19
3.11.	Empaquetamiento de triángulos curvados . . . . .	20
3.12.	Secuenciación y empaquetamiento . . . . .	20
4.1.	Malla para modelo sin frontera . . . . .	27
4.2.	(a) objeto está dentro del contenedor,(b) objeto esta fuera del con- tenedor . . . . .	29
4.3.	(a) Para $(i, k)$ con $(j, l) \in N_{ik}$ , (b) para $(i, k)$ con $(j, l) \notin N_{ik}$ . . . .	30

4.4.	Ejemplo de malla . . . . .	31
4.5.	Desigualdad valida 1 (casos) . . . . .	34
4.6.	(a) desigualdad valida 2 no se cumple,(b) desigualdad valida 1 cumplida. . . . .	35
4.7.	(a) cubrimiento 2 no se cumple,(b) cubrimiento 1 cumplido . . . .	38
5.1.	. . . . .	41
5.2.	(a) Rombo-características, (b) Rombo-ecuación de inclinación. . . .	43
5.3.	(a) Octágono-características, (b) Octágono-ecuación de inclinación. . . .	44
5.4.	(Rectángulos) (a) asimetría en un solo eje, (b) asimetría en ambos ejes. . . . .	45
5.5.	(Elipses) (a) asimetría en un solo eje, (b) asimetría en ambos ejes. . . .	45
5.6.	(Hexágono) (a) asimetría horizontal (b) asimetría vertical. . . . .	47
5.7.	(A) Circulo trunco . . . . .	48
6.1.	Rectángulos semejantes . . . . .	50
6.2.	Rectángulos intersección . . . . .	50
6.3.	Rectángulos intersección . . . . .	51
6.4.	Objeto Estrella . . . . .	53
6.5.	Intersección rombo-cuadrado en objetos estrella . . . . .	55
6.6.	Rectángulos semejantes . . . . .	58
6.7.	Definiciones:cuadrado y rombo exterior . . . . .	59
6.8.	Utilización de rombos y cuadrados exteriores . . . . .	60

6.9.	Utilización de rombos y cuadrados exteriores . . . . .	60
6.10.	Intersección Circulo-Cuadrado . . . . .	65
6.11.	Intersección Circulo-Rombo . . . . .	65
6.12.	Intersección Cuadrado-Rombo . . . . .	66
6.13.	Ejemplos de empaquetamiento (Objetos diferentes) . . . . .	67
7.1.	Contenedor L (malla) . . . . .	69
7.2.	Corte en troncos . . . . .	70
7.3.	Ejemplo - Contenedor Circular . . . . .	71
7.4.	Revisión de punto interior en polígono . . . . .	72
7.5.	Ejemplo - contenedor poligonal . . . . .	72
7.6.	Ejemplo - contenedor poligonal . . . . .	72
7.7.	Ejemplos - empaquetamiento de esferas en contenedor cilíndrico . .	73
7.8.	Ejemplos - empaquetamiento con malla hexagonal . . . . .	77
8.1.	Inst. 7,74 . . . . .	87
8.2.	(5) . . . . .	90
8.3.	(5) . . . . .	90
9.1.	Inst. 7 . . . . .	95
9.2.	Inst. 7 . . . . .	95
9.3.	Inst. 7 . . . . .	95
9.4.	5,ST . . . . .	97

---

9.5.	5,CT . . . . .	97
9.6.	5,CTB . . . . .	97
10.1.	Inst. 7 . . . . .	102
10.2.	Inst. 3-ST . . . . .	103
10.3.	Inst. 3-CT . . . . .	103
11.1.	Inst. 1,18 . . . . .	107
11.2.	Representación de la relación entre base y altura . . . . .	108
11.3.	Inst. 5 (R:R) . . . . .	110
11.4.	Inst. 5 (R:2R) . . . . .	110
11.5.	3,CT . . . . .	113
11.6.	Ejemplo de malla . . . . .	114
11.7.	Solución , empaquetamiento con 4 direcciones (para $k=1..5$ ) . . . .	118
11.8.	Solución , empaquetamiento con 4 direcciones (para $k=1,2,3,4$ ) . .	118
11.9.	Contenedor L . . . . .	119
11.10.	Inst. 2 . . . . .	120
12.1.	Soluciones - relajación lineal . . . . .	123
12.2.	Solución para relajación lineal , refinación de malla . . . . .	124
12.3.	Diferentes mallas que incluyen la original $k = 0$ . . . . .	128
12.4.	Inst. 7 . . . . .	131
12.5.	Inst. 7 . . . . .	133

---

A.1.	Inst. 1 . . . . .	135
A.2.	Inst. 2 . . . . .	135
A.3.	Inst. 3 . . . . .	135
A.4.	Inst. 4 . . . . .	136
A.5.	Inst. 5 . . . . .	136
A.6.	Inst. 6 . . . . .	136
A.7.	Inst. 7 . . . . .	136
A.8.	Inst. 8 . . . . .	136
A.9.	Inst. 9 . . . . .	136
A.10.	(1) . . . . .	137
A.11.	(2) . . . . .	137
A.12.	(5) . . . . .	138
A.13.	(1) . . . . .	138
A.14.	(2) . . . . .	138
A.15.	(3) . . . . .	139
A.16.	(4) . . . . .	139
A.17.	(5) . . . . .	139
A.18.	(6) . . . . .	139
B.1.	Inst. 1 . . . . .	140
B.2.	Inst. 1 . . . . .	140
B.3.	Inst. 1 . . . . .	140

---

B.4.	Inst. 2 . . . . .	141
B.5.	Inst. 2 . . . . .	141
B.6.	Inst. 2 . . . . .	141
B.7.	Inst. 3 . . . . .	141
B.8.	Inst. 3 . . . . .	141
B.9.	Inst. 3 . . . . .	141
B.10.	Inst. 4 . . . . .	142
B.11.	Inst. 4 . . . . .	142
B.12.	Inst. 4 . . . . .	142
B.13.	Inst. 5 . . . . .	142
B.14.	Inst. 5 . . . . .	142
B.15.	Inst. 5 . . . . .	142
B.16.	Inst. 6 . . . . .	143
B.17.	Inst. 6 . . . . .	143
B.18.	Inst. 6 . . . . .	143
B.19.	Inst. 7 . . . . .	143
B.20.	Inst. 7 . . . . .	143
B.21.	Inst. 7 . . . . .	143
B.22.	Inst. 8 . . . . .	144
B.23.	Inst. 8 . . . . .	144
B.24.	Inst. 8 . . . . .	144



---

B.25.	Inst. 9 . . . . .	144
B.26.	Inst. 9 . . . . .	144
B.27.	Inst. 9 . . . . .	144
B.28.	1,ST . . . . .	145
B.29.	1,CT . . . . .	145
B.30.	1,CTB . . . . .	145
B.31.	2,ST . . . . .	145
B.32.	2,CT . . . . .	145
B.33.	2,CTB . . . . .	145
B.34.	3,ST . . . . .	145
B.35.	3,CT . . . . .	145
B.36.	3,CTB . . . . .	145
B.37.	4,ST . . . . .	146
B.38.	4,CT . . . . .	146
B.39.	4,CTB . . . . .	146
B.40.	5,ST . . . . .	146
B.41.	5,CT . . . . .	146
B.42.	5,CTB . . . . .	146
B.43.	6,ST . . . . .	146
B.44.	6,CT . . . . .	146
B.45.	6,CTB . . . . .	146

---

C.1.	Inst. 1 . . . . .	148
C.2.	Inst. 2 . . . . .	148
C.3.	Inst. 3 . . . . .	148
C.4.	Inst. 4 . . . . .	149
C.5.	Inst. 5 . . . . .	149
C.6.	Inst. 6 . . . . .	149
C.7.	Inst. 7 . . . . .	149
C.8.	Inst. 8 . . . . .	149
C.9.	Inst. 9 . . . . .	149
C.10.	Inst. 1-ST . . . . .	150
C.11.	Inst. 1-CT . . . . .	150
C.12.	Inst. 2-ST . . . . .	150
C.13.	Inst. 2-CT . . . . .	150
C.14.	Inst. 3-ST . . . . .	151
C.15.	Inst. 3-CT . . . . .	151
C.16.	Inst. 4-ST . . . . .	151
C.17.	Inst. 4-CT . . . . .	151
C.18.	Inst. 4-CT (*) . . . . .	152
D.1.	Inst. 1 (R:R) . . . . .	154
D.2.	Inst. 1 (R:2R) . . . . .	154
D.3.	Inst. 2 (R:R) . . . . .	154

---

D.4.	Inst. 2 (R:2R) . . . . .	154
D.5.	Inst. 3 (R:R) . . . . .	155
D.6.	Inst. 3 (R:2R) . . . . .	155
D.7.	Inst. 4 (R:R) . . . . .	155
D.8.	Inst. 4 (R:2R) . . . . .	155
D.9.	Inst. 5 (R:R) . . . . .	156
D.10.	Inst. 5 (R:2R) . . . . .	156
D.11.	Inst. 6 (R:R) . . . . .	156
D.12.	Inst. 6 (R:2R) . . . . .	156
D.13.	1,ST,(R:R) . . . . .	157
D.14.	1,CT,(R:R) . . . . .	157
D.15.	2,ST,(R:2R) . . . . .	157
D.16.	2,CT,(R:2R) . . . . .	157
D.17.	3,ST,(R:R) . . . . .	158
D.18.	3,CT,(R:R) . . . . .	158
D.19.	4,ST,(R:R) . . . . .	158
D.20.	4,CT,(R:R) . . . . .	158
D.21.	1,ST,(R:R) . . . . .	159
D.22.	1,CT,(R:R) . . . . .	159
D.23.	2,ST,(R:2R) . . . . .	159
D.24.	2,CT,(R:2R) . . . . .	159

---

D.25.	3,ST,(R:R)	160
D.26.	3,CT,(R:R)	160
D.27.	4,ST,(R:2R)	160
D.28.	4,CT,(R:2R)	160
D.29.	1,CT,8hr.,(R:R)	161
D.30.	2,CT,8hr.,(R:2R)	161
D.31.	3,CT,8hr.,(R:R)	161
D.32.	4,CT,8hr.,(R:2R)	161
D.33.	1,ST	162
D.34.	1,CT	162
D.35.	2,ST	162
D.36.	2,CT	162
E.1.	Inst. 1	163
E.2.	Inst. 2	163
E.3.	Inst. 3	163
E.4.	Inst. 4	164
E.5.	Inst. 5	164
E.6.	Inst. 6	164
E.7.	Inst. 7	164
E.8.	Inst. 8	164
E.9.	Inst. 9	164

---

E.10.	Inst. 1 . . . . .	165
E.11.	Inst. 2 . . . . .	165
E.12.	Inst. 3 . . . . .	165
E.13.	Inst. 4 . . . . .	165
E.14.	Inst. 5 . . . . .	165
E.15.	Inst. 6 . . . . .	165
E.16.	Inst. 7 . . . . .	166
E.17.	Inst. 8 . . . . .	166
E.18.	Inst. 9 . . . . .	166

# ÍNDICE DE TABLAS

---

2.1. Tabla de símbolos . . . . .	5
8.1. Características de instancias y malla . . . . .	80
8.2. Experimentación, Diseño . . . . .	81
8.3. Resultados, relajación lineal . . . . .	82
8.4. Solución entera sin desigualdades validas (S/SC o CMP/SC) y $Gap = 0\%$ . . . . .	83
8.5. Solución entera con desigualdades validas (S/CC o CMP/CC) y $Gap = 0\%$ . . . . .	84
8.6. Tiempos para solución entera, modelo (S), con/sin desigualdades validas, $Gap = 0\%$ . . . . .	85
8.7. Tiempos para solución entera, modelo (CMP), con/sin desigualdades validas, $Gap = 0\%$ . . . . .	85
8.8. Tiempos para solución entera para modelo (S) con/sin desigualdades validas, $Gap = 5\%$ . . . . .	86
8.9. Tiempos para solución entera para modelo (CMP) con/sin desigualdades validas, $Gap = 5\%$ . . . . .	86
8.10. Características de objetos . . . . .	88

8.11. Características instancias (difs. tipos) . . . . .	88
8.12. Soluciones IP, varios tipos de objetos . . . . .	89
8.13. Soluciones IP, varios tipos de objetos, telescopía . . . . .	89
9.1. Resultados - relajación lineal . . . . .	93
9.2. Cotas enteras de instancias . . . . .	93
9.3. Diseño de instancias (octágonos) . . . . .	96
9.4. Experimentación con octágonos, con y sin telescopía . . . . .	96
10.1. Características de instancias . . . . .	99
10.2. Experimentación, Diseño . . . . .	100
10.3. Resultados de experimentación con relajación lineal (RL) . . . . .	101
10.4. Tiempos y cotas para solución entera (IP), con/sin desigualdades validas, $Gap = 0\%$ . . . . .	101
10.5. Características de instancias, mas de un tipo de objeto y telescopía . . . . .	102
10.6. Resultados experimentación (2horas) . . . . .	103
10.7. Comparativa soluciones, fijando $x_i k == 1$ . . . . .	104
10.8. $P \geq 90\%$ , $Z = 1.645$ . . . . .	105
11.1. Características de instancias ( $R : R, R : 2R$ ) . . . . .	108
11.2. Resultados experimentación (Para un tipo) . . . . .	110
11.3. Instancias (diferentes objetos L) . . . . .	111
11.4. Resultados para difs. objs. L (sin telescopía) . . . . .	112
11.5. Resultados para difs. objs. L (con telescopía) . . . . .	112

11.6. Características de instancias básicas . . . . .	113
11.7. Diseño de experimentación (Objetos-L) . . . . .	115
11.8. Experimentación difs. orientaciones, relajación lineal . . . . .	116
11.9. Experimentación (IP) difs. orientaciones . . . . .	116
11.10 Experimentación difs. orientaciones (telescopía 2 hrs.) . . . . .	116
11.11 Experimentación difs. orientaciones (telescopía 8 hrs.) . . . . .	117
11.12 Instancias difs. orientaciones (ejem. 4 Orientaciones) . . . . .	117
11.13 Características instancias (Contenedor L) . . . . .	119
11.14 Características de instancias . . . . .	120
12.1. Estimación parámetro $\gamma$ , con soluciones previas para círculos . . . .	128
12.2. Relajaciones Lineales para distintas mallas . . . . .	130
12.3. Soluciones Heurística / Círculos $n_{\alpha/2}$ . . . . .	130
12.4. Relajaciones lineales - octágono . . . . .	132
12.5. Soluciones Heurística / Octágonos . . . . .	132



# BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] ADAMOWICZ, M. y A. ALBANO, «Nesting two-dimensional shapes in rectangular modules», *Computer-Aided Design*, **8**(1), págs. 27 – 33, 1976.
- [2] ALVES, J. C., J. C. FERREIRA, C. ALBUQUERQUE, J. F. OLIVEIRA, J. S. FERREIRA y J. S. MATOS, «Accelerating Nesting Problems with FPGAs», *IEEE Symposium on Field-Programmable Computing Machines*, 1999.
- [3] ANDRADE, R., E. BIRGIN y R. MORABITO, «Two-stage two-dimensional guillotine cutting stock problems with usable leftover», *International Transactions in Operational Research*, 2014.
- [4] ASTE, T. y D. WEAIRE, *The pursuit of perfect packing*, segunda edición, CRC Press, 2008.
- [5] BABU, A. R. y N. R. BABU, «A generic approach for nesting of 2-D parts in 2-D sheets using genetic and heuristic algorithms», *Computer-Aided Design*, **33**(12), págs. 879 – 891, 2001.
- [6] BEASLEY, J. E., «An Exact Two-Dimensional Non-Guillotine Cutting Tree Search Procedure», *Operations Research*, **33**(1), págs. 49–64, 1985.
- [7] BENNELL, J. A. y J. F. OLIVEIRA, «The geometry of nesting problems: A tutorial», *European Journal of Operational Research*, **184**(2), págs. 397 – 415, 2008.
- [8] BENNELL, J. A. y X. SONG, «A beam search implementation for the irregular shape packing problem», *Journal of Heuristics*, **16**(2), págs. 167–188, 2010.

- 
- [9] BIRGIN, E. G. y J. M. GENTIL, «New and improved results for packing identical unitary radius circles within triangles, rectangles and strips», *Computers and Operations Research*, **37**(7), págs. 1318 – 1327, algorithmic and Computational Methods in Retrial Queues, 2010.
- [10] BIRGIN, E. G., J. M. MARTÍNEZ y D. P. RONCONI, «Optimizing the Packing of Cylinders into a Rectangular Container: A Nonlinear Approach», *European Journal of Operational Research*, **160**, pág. 19?33, 2003.
- [11] BURKE, E. y G. KENDALL, «Applying Simulated Annealing and the No Fit Polygon to the Nesting Problem», *World Manufacturing Congress*, págs. 27–30, 1999.
- [12] CASTILLO, I., F. J. KAMPAS y J. D. PINTÉR, «Solving circle packing problems by global optimization: Numerical results and industrial applications», *European Journal of Operational Research*, **191**(3), págs. 786 – 802, 2008.
- [13] CHEN, C., S. LEE y Q. SHEN, «An analytical model for the container loading problem», *European Journal of Operational Research*, **80**(1), págs. 68 – 76, 1995.
- [14] CORREIA, M. H., J. F. OLIVEIRA y J. S. FERREIRA, «J.S.: Cylinder packing by simulated annealing», *Pesquisa Operacional*, **20**, págs. 269–286, 2000.
- [15] DELANEY, G., D. WEAIRE, S. HUTZLER y S. MURPHY, «Random packing of elliptical disks», *Philosophical Magazine Letters*, **85**, págs. 89–96, 2005.
- [16] DYCKHOFF, H., «A typology of cutting and packing problems», *European Journal of Operational Research*, **44**(2), págs. 145 – 159, cutting and Packing, 1990.
- [17] FASANO, G., «MIP-based heuristic for non-standard 3D-packing problems», *4OR*, **6**(3), págs. 291–310, 2008.

- 
- [18] FASANO, G., «Solving Non-standard Packing Problems by Global Optimization and Heuristics», *SpringerBriefs in Optimization*, págs. 96–101, 2014.
- [19] FUKSHANSKY, L., «Revisiting the Hexagonal Lattice: On Optimal Lattice Circle Packing.», *Algebra, Combinatorics Seminar*, 2010.
- [20] GALIEV, S. I. y M. S. LISAFINA, «Linear models for the approximate solution of the problem of packing equal circles into a given domain», *European Journal of Operational Research*, **230**(3), págs. 505 – 514, 2013.
- [21] GEORGE, J. A., J. M. GEORGE y B. W. LAMAR, «Packing different-sized circles into a rectangular container», *European Journal of Operational Research*, **84**(3), págs. 693 – 712, cutting and Packing, 1995.
- [22] GOLDBERG, M., «The packing of equal circles in a square», *Math. Mag.*, **43**(1), págs. 24–30, 1970.
- [23] GÜRBÜZ, M., S. AKYOKUS, I. EMIROQLU y A. GÜRAN, «An Efficient Algorithm for 3D Rectangular Box Packing», *Applied Automatic Systems Proceedings of Selected AAS*, 2009.
- [24] GROSSO, A., A. JAMALI, M. LOCATELLI y F. SCHOEN, «Solving the problem of packing equal and unequal circles in a circular container», *Journal of Global Optimization*, **47**(1), págs. 63–81, 2010.
- [25] HAINES, E., «Point in Polygon Strategies», *Graphics Gems IV*, págs. 24–46, 1994.
- [26] HECKMANN, R. y T. LENGAUER, «A simulated annealing approach to the nesting problem in the textile manufacturing industry», *Annals of Operations Research*, **57**(1), págs. 103–133, 1995.
- [27] HIFI, M. R., MHAND, «A literature review on circle and sphere packing problems: models and methodologies», *Advances in Operations Research*, 2009.

- 
- [28] HUANG, W., L. YU, L. MIN y X. CHU, «New Heuristics for Packing Unequal Circles into a Circular Container», *Comput. Oper. Res.*, **33**(8), págs. 2125–2142, agosto 2006.
- [29] HUANG, W. Q., L. AKEB y C. LI, «Greedy Algorithms for Packing Unequal Circles Into a Rectangular Container», *The Journal of the Operational Research Society*, **56**(5), págs. 539–548, 2005.
- [30] HUNTER, J. K. y B. NACHTERGAELE, «Capítulo 6: Espacios con producto interno, Ortogonalidad», *Algebra Lineal*, págs. 259–261, 1992.
- [31] HUNTER, J. K. y B. NACHTERGAELE, «Chapter 1: Metrics and Normed Spaces», *Applied Analysis*, 2001.
- [32] J.C FERREIRA, J. A., C. ALBUQUERQUE, J. OLIVEIRA y J. M. J.S. FERREIRA, «A Flexible Custom Computing Machine for Nesting Problem», *Proceedings of XIII DCIS*, 1998.
- [33] KRAVITZ, S., «Packing Cylinders into Cylindrical Containers», *Mathematics Magazine*, **40**(2), págs. pp. 65–71, 1967.
- [34] LARYSA BURTSEVA, F. W. V. P., BENJAMIN VALDEZ SALAS, «Consistent Patterns of Encapsulating Hard Spheres in Restricted Volumes: Modeling the Confinement of Nanoparticles in Nanoporous Matrices», *Conference Paper, 5th International Colloids Conference*, 2013.
- [35] LITVINCHEV, I., L. INFANTE y L. OZUNA, *Approximate Circle Packing in a Rectangular Container: Integer Programming Formulations and Valid Inequalities*, *Lecture Notes in Computer Science*, tomo 8760, Springer International Publishing, 2014, URL [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-11421-7\\_4](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-11421-7_4).
- [36] LITVINCHEV, I., L. INFANTE y L. OZUNA, «LP-based heuristic for packing circular-like objects in a rectangular container», *Proceedings of the Brazilian Symposium on Operations Research*, 2015.

- 
- [37] LITVINCHEV, I., L. INFANTE y L. OZUNA, «LP-based heuristic for packing circular-like objects in a rectangular container», *Proceedings of International Congress on Logistics and Supply Chain*, 2015.
- [38] LITVINCHEV, I., L. INFANTE y L. OZUNA, «Packing circular-like objects in a rectangular container», *Journal of Computer and Systems Sciences International*, **54**(2), págs. 259–267, 2015.
- [39] LITVINCHEV, I., L. INFANTE y L. OZUNA, «Using Different Norms in Packing Circular Objects», **9012**, págs. 540–548, 2015.
- [40] LITVINCHEV, I., L. INFANTE y L. OZUNA, «LP-based heuristic for packing circular-like objects in a rectangular container», *Lecture Notes*, 2016.
- [41] LITVINCHEV, I. y E. OZUNA, «Approximate Packing Circles in a Rectangular Container: Valid Inequalities and Nesting», *Journal of Applied Research and Technology*, **12**(4), págs. 716 – 723, 2014.
- [42] OLIVEIRA, J. y J. FERREIRA, *Applied Simulated Annealing, Algorithms for Nesting Problems, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, tomo 396, Springer Berlin Heidelberg, 1993.
- [43] PEDROSO, J. P., S. CUNHA y J. N. TAVARES, «Recursive circle packing problems», *International Transactions in Operational Research*, 2014.
- [44] PRADENAS, L., J. GARCÉS, V. PARADA y J. FERLAND, «Genotype-phenotype heuristic approaches for a cutting stock problem with circular patterns», *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, **26**(10), págs. 2349 – 2355, 2013.
- [45] RAFFI, L. G. y E. S. PÉREZ, «Asymmetric norms and optimal distance points in linear spaces», *Topology and its Applications*, **155**(13), págs. 1410 – 1419, 2008.

- 
- [46] REINDERS, M., «Cutting stock optimization and integral production planning for centralized wood processing», *Mathematical and Computer Modelling*, **16**(1), págs. 37 – 55, 1992.
- [47] STEVEN ATKINSON, Y. J., SALVATORE TORQUATO, «Maximally dense packings of two-dimensional convex and concave noncircular particles», *Physical Review E* **86**, 2012.
- [48] SUTOU, D., «Global Optimization Approach to Unequal Sphere Packing Problems in 3D», *Journal of optimization theory and applications*, **114**(3), págs. 671–694, 2002.
- [49] UMETANI, S. y M. YAGIURA, «Relaxation Heuristics for Set Covering Problem», *Journal of the Operations Research*, **50**(4), págs. 350–375, 2007.
- [50] WANG, J., «Packing of Unequal Spheres and Automated Radiosurgical Treatment Planning», *Journal of Combinatorial Optimization*, **3**(4), págs. 453–463, 1999.
- [51] WATSON, P. D. y A. M. TOBIAS, «An Efficient Algorithm for the Regular W1 Packing of Polygons in the Infinite Plane», *The Journal of the Operational Research Society*, **50**(10), págs. pp. 1054–1062, 1999.
- [52] WOLSEY, L., «Book Reviews», *IIE Transactions*, **32**(3), págs. 273–285, 2000.
- [53] WÄSCHER, G., H. HAUSSNER y H. SCHUMANN, «An improved typology of cutting and packing problems», *European Journal of Operational Research*, **183**(3), págs. 1109 – 1130, 2007.
- [54] ZHANG, H., «Packing: Scheduling, Embedding, and Approximating Metrics», *Lecture Notes in Computer Science, Computational Science and Its Applications*, **3045**, págs. 764–775, 2004.

# FICHA AUTOBIOGRÁFICA

---

Luis Alfonso Infante Rivera

Candidato para el grado de Maestro en Ingeniería  
con especialidad en Ingeniería de Sistemas

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Tesis:

## APROXIMACIÓN MEDIANTE MODELOS DE PROGRAMACIÓN ENTERA A PROBLEMAS DE EMPAQUETAMIENTO

Soy Luis Alfonso Infante Rivera, hijo de Lucia Rivera Alvarez y Jesus Infante Molina, nací en Monterrey el 19 de Noviembre de 1978, en el estado de Nuevo León, soy egresado en Licenciatura en Ciencias de la Computación en el año 2010, de la facultad de Ciencias Físico Matemáticas que pertenece a la Universidad Autónoma de Nuevo Leon, posteriormente continúe mis estudios en la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica en la división de Posgrado en Ingeniería de Sistemas